

Chapitre 12

La numération positionnelle

Jusqu'ici, nous avons évité d'utiliser la notation des nombres plus grands que neuf au moyen de la numération positionnelle. En fait, ce système de numération est très complexe et sous-entend des concepts que nous devons aborder et développer afin que l'élève comprenne bien la numération. Parmi ces divers concepts figurent ceux de multiplication (car 25 signifie $2 \times 10 + 5 \times 1$) et de double inclusion (le symbole qui représente les dizaines représente en même temps des unités : dans 25, il y a 2 dizaines et 5 unités ou encore 1 dizaine et 15 unités ou simplement 25 unités).

Dans ce chapitre, l'élève devra d'abord utiliser le groupement pour organiser des quantités. Les groupements ne comporteront alors que cinq éléments ou moins et les quantités seront relativement petites (moins que 30 éléments).

Par la suite, devant des quantités plus grandes, l'élève aura l'occasion d'inventer le groupement en dizaines. L'étape suivante, qui sera réalisée dans un chapitre ultérieur, consistera à représenter des quantités de façons diverses, ce qui permettra éventuellement de développer les techniques de calcul.

Enfin, en tout dernier lieu, l'élève associera le nom des nombres à leur représentation symbolique. D'ici ce temps, si votre enfant ne compte pas facilement jusqu'à 50 au moins, développez cet apprentissage. Il s'agit ici d'apprendre la suite des nombres, comme une comptine que l'on mémorise. N'hésitez pas à le faire jusqu'à 100.

Matériel

- Une centaine de jetons (ou de boutons ou de pièces d'un cent) ;
- Une dizaine de carrés de carton ou de papier de 10 cm de côté ;
- Un paquet de cartes à jouer ;

Profil

Durant ce chapitre, l'enfant devra atteindre les seuils qui suivent.

Compréhension

- Grouper spontanément en dizaines les quantités d'éléments excédant trente afin de les dénombrer.
- Constater le besoin d'une convention de position dans la numération positionnelle moderne. (Voir problème 13.)
- Interpréter la numération positionnelle de 0 à 99.

Raisonnement

- Chaque fois qu'il fait des groupements, l'enfant vérifie si le nombre d'éléments de chaque groupement est bien exact.
- Règle générale, il vérifie son travail avant de demander à être corrigé.

Efficacité

- Lire et écrire les nombres de 0 à 99.
- Dénombrer correctement des ensembles de 0 à 99 éléments.

Problème 1

Racontez à votre enfant qu'il y a longtemps, très longtemps (en fait il y a plus de 20 à 30 mille ans), personne ne savait compter. Au début, cela ne causait pas de problèmes car les gens n'avaient pas besoin de compter. Mais, avec le temps, ils ont commencé à avoir des difficultés.

Voici ce qui s'est passé. Ces personnes ont lentement commencé à posséder des biens. Au début, d'un seul regard, ils pouvaient savoir combien ils avaient de fruits ou de moutons ou de jolis coquillages. Mais comme ils en avaient de plus en plus, il leur est arrivé de ne plus être capables de savoir s'ils avaient tous leurs biens, s'il leur en manquait ou si, par erreur, ils avaient des objets qui appartenaient à leurs amis.

Nous allons essayer de voir jusqu'à quelle quantité d'objets tu peux identifier d'un seul coup d'œil.

Voilà pour la mise en scène. Maintenant, vous allez placer un certain nombre de jetons sur la table et les recouvrir d'un objet quelconque. Quand l'enfant est prêt, vous lui laissez voir les jetons durant un maximum de deux secondes. Lorsque les jetons sont à nouveau recouverts, il doit vous dire combien il y en a. Procédez ensuite à une vérification en soulignant le fait que plus il y en a, plus c'est difficile. Normalement, à compter de 5 ou 6 jetons placés pêle-mêle, la difficulté apparaît.

Essayez donc avec diverses quantités à partir d'un seul jeton jusqu'à une douzaine. N'oubliez pas de placer les jetons pêle-mêle en évitant, par exemple, de les placer dans des dispositions semblables à celles que l'on peut percevoir sur un dé ou sur une carte à jouer.

Prolongez cette activité jusqu'au moment où votre enfant perçoit clairement que, d'un coup d'œil, il y a des limites à identifier correctement une quantité d'objets pêle-mêle.

Utilisez une séquence de problèmes dans laquelle vous cacherez successivement: 3 jetons, 1 jeton, 4, 6, 2, 8, 3, 5, 7, 9, ...

Problème 2

Cette fois, vous reprendrez l'activité précédente, mais en n'utilisant que des ensembles de 4 à 8 jetons. D'un essai à l'autre, avec la même quantité de jetons, vous les disposerez différemment : parfois pêle-mêle, parfois organisés comme sur un dé ou sur une carte à jouer.

Prolongez cette activité jusqu'à ce qu'il soit assez clair pour l'enfant qu'il existe certaines dispositions qui facilitent la perception adéquate des quantités.

D'un essai à l'autre, vous devrez modifier la disposition et le nombre de jetons.

Problème 3

Sortez les cartes à jouer. Cette fois, vous allez recouvrir quelques cartes au lieu de quelques jetons. Vous laisserez environ cinq secondes à votre enfant pour observer les cartes avant de les recouvrir. Lorsqu'elles auront été recouvertes, vous demanderez à votre enfant le nombre total que représentait ces cartes. Par exemple, il y avait trois « six » et un « quatre » donc il y avait 22 figures.

Pour trouver le nombre cherché, votre enfant aura le droit d'utiliser des jetons (Il pourrait, par exemple, reproduire les diverses cartes cachées avec ses jetons.) il pourra compter sur ses doigts (Dans ce cas, ne l'aidez pas lorsqu'il oubliera probablement combien de paquets de chaque sorte il a déjà dénombré. Mais ne l'empêchez pas d'utiliser ses doigts.) ; il pourra compter dans sa tête ou écrire soit les nombres représentant chaque carte ou soit des traits pour illustrer chaque figure des diverses cartes.

Discutez avec lui de ses procédures, sans tenter de les modifier. Discutez surtout du fait, qui devrait devenir évident, que certaines cartes permettent de calculer plus vite que d'autres. Ainsi, il devrait avoir plus de facilité avec un dix et un quatre qu'avec un neuf et un quatre,

Vérifiez chaque réponse de votre enfant en découvrant les cartes cachées. Voici la séquence de problèmes à proposer.

- a) 5 et 1 (Un « 5 » et un as pour un total de six figures.)
- b) 4 et 4 (Deux « 4 » pour un total de 8.)
- c) 8 et 3
- d) 6 et 2
- e) 10 et 5
- f) 8 et 8
- g) 5, 5, et 1 (Deux « 5 » et un as.)
- h) 3, 3 et 7
- i) 10, 10 et 2

Note : Ce dernier problème sera probablement plus facile que le précédent car les enfants comptent plus facilement par 10 que par 3. Si tel est le cas, n'hésitez pas à le faire remarquer à votre enfant.

- j) 8, 8 et 6
- k) 7, 7 et 7
- l) 10, 10 et 10
- m) 6, 6, 6 et 5
- n) 9, 9, 9 et 8
- o) 10, 10, 10 et 7

Problème 4

Cette activité vise à bien établir le fait qu'il est plus facile de compter par dix que par six ou par sept, par exemple.

Dites à votre enfant que vous allez lui montrer quatre cartes identiques et qu'il devra trouver le plus vite possible le nombre total de figures. Dites-lui qu'il s'agit de voir avec quelles cartes c'est facile et avec quelles cartes c'est plus difficile. Ainsi, s'il éprouve des difficultés avec certaines cartes (Probablement avec les 6, 7, 8, 9 et même avec les 3 et les 4.) il comprendra mieux pourquoi il est avantageux, pour ceux qui savent compter avec notre système de numération, de regrouper les éléments en paquets de dix. Donc, les difficultés que présentent cet exercice sont souhaitables et source d'apprentissage. Il ne faut pas que votre enfant en soit troublé. Au contraire, profitez-en pour lui mentionner qu'il vient de faire une grande découverte (i.e. qu'il est plus facile de compter par 1 et par 10 que par 3 ou par 7 ou par 9) que nos ancêtres ont mis des années à faire. Voici la séquence de problèmes suggérée.

- a) Quatre as
- b) Quatre « 2 »

(**Note :** ces deux premiers problèmes visent surtout à lui faire comprendre l'activité.)

- c) Quatre « 7 »
- d) Quatre « 5 »
- e) Quatre « 3 »
- f) Quatre « 8 »
- g) Quatre « 9 »
- h) Quatre « 6 »
- i) Quatre « 4 »
- j) Quatre « 10 »

Notes :1. Au besoin, reprenez le problème en entier jusqu'à ce qu'il soit évident pour l'enfant que c'est plus facile avec certains nombres qu'avec d'autres. Discutez-en avec lui.

2. S'il ne sait pas compter au moins jusqu'à 50, développez d'abord cet apprentissage.

Problème 5

Avant d'aborder le présent problème, prenez quelques instants afin de répondre aux questions suivantes. Ces questions s'adressent à vous et non à votre enfant.

- Comment procédez-vous pour dénombrer un ensemble de 20 à 30 jetons ?
- Et comment procédez-vous lorsque l'ensemble contient au moins 50 jetons ?

Vous avez répondu à ces deux questions. Dans ce cas, vous avez probablement pensé que vous ne procédiez pas de la même façon dans les deux cas. Pour les ensembles de moins de trente (30) éléments, la majorité des gens, enfants comme adultes, comptent ces éléments un après l'autre ou par groupes de deux. Par contre, lorsque le nombre d'éléments est supérieur à trente (30), comme il y a plus de chances d'erreur, règle générale, nous groupons les éléments par dizaines. Le problème que vous allez amorcer a pour but de faire prendre conscience à l'enfant que, pour de grandes quantités, il faut grouper les éléments. À cause de cela, il ne faut pas commencer par demander à l'enfant de dénombrer des quantités inférieures à trente (30) qui n'exigent pas le groupement. C'est donc avec des grandes quantités que nous commencerons afin qu'il sente le besoin d'ordonner ses éléments.

Si l'enfant ne fait pas spontanément des paquets, laissez-le faire. Au moment opportun, nous allons le placer devant des difficultés qui devraient lui permettre de se réorienter.

Placez devant l'enfant une poignée d'au moins cinquante (50) jetons et demandez-lui de trouver combien il y en a. (Voir les notes.)

Notes : 1. Si l'enfant fait des paquets de dix spontanément, passez au problème 6.
2. Si l'enfant fait des paquets égaux qui ne sont pas constitués de dix jetons chacun, discutez de la possibilité de faire des paquets de dix. Demandez-lui si ce n'est pas plus facile à compter. Si ce n'est pas évident, il faut revenir au problème 4.

3. Si l'enfant ne fait aucun paquet, recommencez l'exercice en plaçant devant lui un autre ensemble de jetons, celui-là sera d'au moins soixante (60) jetons. S'il les compte un par un, sans faire de paquets, dérangez-le. Interrompez son travail sous un prétexte quelconque, montrez un jeton qui est par terre en lui demandant s'il l'a compté, demandez-lui s'il pense qu'il y en a plus qu'au problème précédent ... Et s'il ne modifie pas sa procédure, dites-lui à la fin, que vous allez vérifier avec lui, mais faites en sorte de glisser cinq ou six jetons de plus dans l'ensemble à dénombrer.

Comme vous n'obtiendrez pas le même compte, parlez-en à l'enfant. Que s'est-il passé ? Puis recommencez avec un autre ensemble d'une soixantaine de jetons. À la fin, recomptez-les avec l'enfant après avoir encore une fois ajouté discrètement quelques jetons.

N'allez pas plus loin pour l'instant. Ne reprenez pas cet exercice avant cinq à sept jours. Travaillez à autre chose, à quelque chose de bien différent.

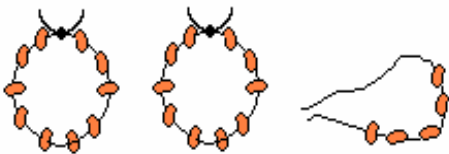
Après cinq à sept jours, reprenez le problème. Si l'enfant ne regroupe pas, c'est probablement parce que le concept de multiplication n'est pas suffisamment élaboré. Dans les semaines qui viennent, régulièrement, posez-lui les problèmes semblables au problème des lions et des ânes (Chapitre 1, problème 5). Passez au problème 6.

Problème 6

Racontez à votre enfant qu'avec le temps, nos ancêtres ont appris à compter. Durant de nombreuses années, ils n'ont compté que jusqu'à dix, même s'ils devaient dénombrer des quantités beaucoup plus grandes que dix.

Dites-lui aussi que, dans ce temps-là, les gens étaient des nomades et que leurs voyages duraient plusieurs jours. Pour savoir depuis combien de jours ils voyageaient, ils confectionnaient des bracelets de coquillages. Chaque bracelet noué comptait toujours dix coquillages.

Voici un exemple après vingt-cinq jours.



Mais comme il ne savait pas compter jusqu'à 25, ils disaient : « Notre voyage dure depuis deux bracelets de jours et ces autres jours (en montrant le bracelet non noué) ».

Prenez vos carrés de cartons et vos jetons. Dites à l'enfant que sur chaque carré il devra placer le nombre de jetons qu'il faut pour montrer les dix coquillages d'un bracelet. S'il reste des coquillages, qui ne peuvent pas faire un bracelet, car il y en a moins que dix, il faudra les placer à côté des cartons.

Donnez donc un ensemble de 50 à 80 jetons à votre enfant et demandez-lui de les disposer pour trouver le nombre de bracelets faisables avec cette quantité de jetons. Combien y aura-t-il de bracelets et combien restera-t-il de coquillages seuls ?

Quand votre enfant aura terminé, mentionnez-lui que les mathématiciens, les vrais, les grands, savent que les bracelets contiennent une dizaine de coquillages et que ceux qui restent peuvent s'appeler des « unités ».

Mentionnez donc qu'un coquillage seul ou un objet seul est appelé « unité » et que lorsqu'on a dix unités, on peut dire « dix unités » ou « une dizaine d'unités » ou simplement « une dizaine ».

Reprenez le problème avec une quarantaine de jetons, assurez-vous qu'il reste des unités libres.

Problème 7

Nous allons consolider ce qui précède. Si l'enfant trouve ce travail long et peu motivant, tant mieux ! Cela le prépare à remplacer les objets par des pictogrammes d'abord et par des symboles ensuite. Donc, prenez le temps de proposer ce qui suit à l'enfant.

- La princesse Isis fit un voyage qui dura quarante-huit jours. Montre-moi avec tes jetons et tes cartons combien elle avait de bracelets et de coquillages libres à la fin de son voyage. Combien cela fait-il de dizaines d'unités et combien reste-t-il d'unités libres ? Combien cela fait-il d'unités en tout ?
- Beaucoup plus tard, le grand roi Toutankhamon fit un voyage qui dura cinquante-trois jours. Combien cela fait-il de dizaines d'unités et combien reste-t-il d'unités libres ? Combien cela fait-il d'unités en tout ?
- Le voyage de Kheops dura soixante-sept jours. Combien cela fait-il de dizaines d'unités et combien reste-t-il d'unités libres ? Combien cela fait-il d'unités en tout ?

Problème 8

Comme les voyages de nos ancêtres étaient de plus en plus long et comme ils voyageaient parfois dans le désert, ils ont dû inventer une autre façon afin de savoir la durée de chacun de leurs voyages. Il leur fallait une façon aussi simple, mais peu encombrante. Que penses-tu qu'ils ont inventé ?

Note : Ils ont inventé les pictogrammes. Ce sont des dessins simples qui remplacent les bracelets et les coquillages. Laissez votre enfant vous proposer ses idées.

- S'il parle des chiffres, dites-lui que c'est exact, mais que ceux-ci étaient très différents des nôtres.
- S'il parle de dessiner les bracelets, félicitez-le, mentionnez-lui que c'est très juste mais que comme ils trouvaient cela un peu long à dessiner, ils ont inventé des dessins plus simples, les chiffres.
- Si votre enfant ne vous propose pas de solution avec dessins ou chiffres, discutez avec lui de ce que représente un dessin et ensuite, un mot, et de l'avantage qu'il y a à les utiliser.

Les grands mathématiciens égyptiens ont donc décidé de noter 3 dizaines et 2 unités comme suit : III I I . Montrez ce nombre égyptien à votre enfant et demandez-lui pourquoi les Égyptiens notaient 3 dizaines et 2 unités de cette façon.

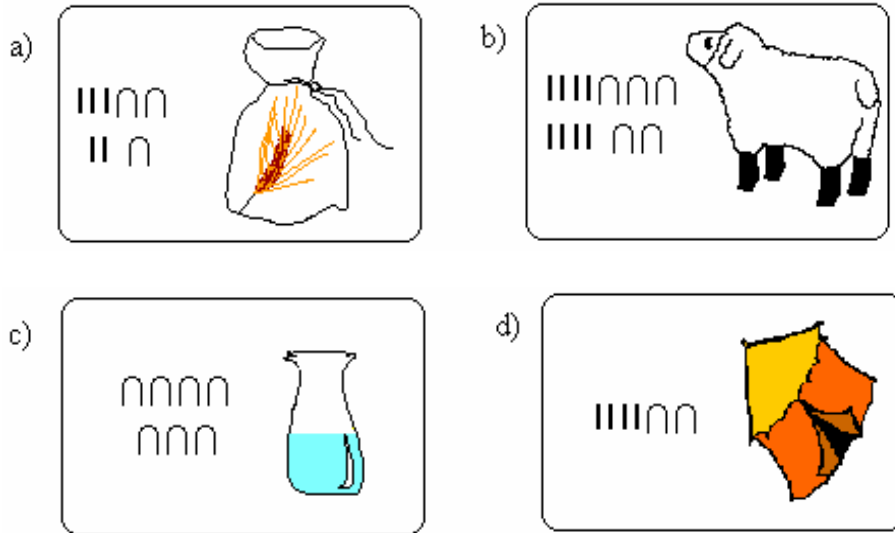
Note : Les dizaines sont à droite et les unités à gauche. Ce n'est pas grave ! Ne vous inquiétez pas de cette inversion. Au moment voulu, nous inverserons ces positions. Pour l'instant, respectons l'histoire.

- a) Que signifiait à cette époque : IIII I ? (2 dizaines et 4 unités)

- b) Et IIII I I I I ?
 c) I I I I (4 dizaines et aucune unité)
 d) IIIIIIII (9 unités)

Problème 9

La grande reine Néfertiti, qui vécut il y a plus de trois mille ans, faisait tracer sur des tablettes d'argile des pictogrammes pour lui rappeler ce qu'elle apportait dans ses voyages. Que penses-tu qu'elle voulait représenter par les dessins suivants sur ses tablettes d'argile ?



Solution :

- a) 35 sacs de blé ;
 b) 58 moutons ;
 c) 70 urnes d'eau ;
 d) 24 tentes.

Problème 10

Invitez votre enfant à faire l'inventaire de quelques éléments de son environnement (Exemples : arbres, fenêtres de la maison, livres, jouets, meubles, personnes, ...). Fabriquez ensuite avec lui des tablettes afin de faire comme Néfertiti. Vous pouvez faire ces tablettes en pâte à modeler, à moins que vous décidiez de faire une bonne recette de biscuits... Sur chacune des « tablettes », votre enfant devra dessiner un objet et les dessins qui représentent leur nombre tel que le faisaient les Égyptiens.

Ce sera une expérience mémorable.

Problème 11

Racontez à votre enfant ce qui suit.

Près de 2000 ans après que Néfertiti a vécu, des citoyens des Indes et d'Arabie ont amélioré le système de nombres en inventant des chiffres semblables aux nôtres. Au lieu d'écrire le nombre six avec six traits, ils écrivaient simplement le chiffre « 6 ». Depuis moins de trois cents ans, nos ancêtres Européens ont adopté le système des chiffres Indo-Arabes. Pour noter, par exemple 2 dizaines et 3 unités, nous n'avons plus qu'à écrire ces deux chiffres.

Prenez une quarantaine de jetons et demandez à votre enfant de trouver combien il y en a en faisant des dizaines tant que cela sera possible. Écrivez ensuite le résultat sous la forme suivante : 4 dizaines et 7 unités.

Recommencez avec quatre autres paquets de jetons en notant chaque fois le nombre de dizaines et le nombre d'unités obtenues.

Problème 12

Dites à votre enfant que c'est long d'écrire chaque fois les mots dizaines et les mots unités. À la place, vous allez les écrire juste une fois et il suffira d'inscrire le nombre de dizaines et le nombre d'unités dans la bonne colonne. Tracez le tableau suivant sur une feuille.

Dizaines	Unités
3	7

Dites à votre enfant que ceci signifie qu'il faut prendre 3 dizaines et 7 unités. Demandez-lui de le faire. Vérifiez son travail.

Maintenant, disposez sur la table 59 jetons formant bien distinctement 5 dizaines et 9 unités. Demandez à votre enfant d'inscrire dans le tableau ci haut le nombre de dizaines et le nombre d'unités. Effacez avant les chiffres 3 et 7 qui y figurent.

Faites quelques exercices semblables aux deux précédents afin que votre enfant se familiarise avec cette notation. Chaque fois, il devra décrire le nombre en précisant combien il a de dizaines et combien il a d'unités libres. De plus, il devra compter les jetons afin de dire qu'il y a, par exemple, 37 jetons, donc 37 unités en tout.

Problème 13

Jouez à votre enfant le tour suivant lorsqu'il réussira bien les exercices du problème 12. Dites-lui qu'avant de passer à autre chose, vous voulez être certain(e) qu'il a bien compris ce qu'il a vu jusqu'à maintenant. Faites un tableau comme suit :

3	5

N'inscrivez pas les mots « dizaines » et « unités ». Demandez à votre enfant de prendre les jetons qui représentent ce qui est écrit.

S'il demande quel chiffre représente les dizaines ou les unités, dites-lui d'essayer de le trouver seul. Dans le cas contraire, laissez-le travailler sans intervenir. Quelle que soit sa solution, qui sera probablement 3 dizaines et 5 unités, dites-lui qu'il s'est trompé, que vous vouliez dire l'inverse : 5 dizaines et 3 unités. Manifestez un peu de déception, mais proposez-lui une seconde chance. Tracez cette fois :

2	1

Demandez-lui d'illustrer cette quantité avec ses jetons. Il est probable qu'il fasse 1 dizaine et 2 unités. S'il vous demande où sont les dizaines ou les unités, dites-lui qu'il le sait probablement.

S'il insiste pour que vous le précisiez, dites-lui que lorsque vous ne l'écrivez pas, les dizaines sont à gauche des unités.

S'il n'insiste pas, laissez-le trouver sa réponse. Dites-lui que vous vouliez dire l'inverse quelle que soit sa réponse.

Ceci a pour but de l'amener à comprendre la nécessité d'une convention. Mentionnez-lui alors cette convention : « les dizaines sont juste à gauche des unités ». Ajoutez que le trait vertical n'est pas utile et que nous allons l'enlever et noter simplement 35 pour signifier 3 dizaines et 5 unités ou 53 pour signifier 5 dizaines et 3 unités.

Notes :1. Cette expérience est importante, n'ayez pas peur de semer la confusion chez l'enfant. En fait, cette confusion temporaire est nécessaire afin qu'il perçoive la nécessité d'établir une convention.

2. Évitez aussi de dire que les dizaines sont à gauche et les unités à droite, ce qui pourrait causer des problèmes lorsqu'on abordera la centaine.

Problème 14

Dans les semaines qui suivent, sur une base régulière, demandez à votre enfant de compter jusqu'à cent.

Demandez-lui d'écrire des nombres en précisant chaque fois combien ils comportent de dizaines et d'unités. Par exemple : « Écris-moi le nombre quarante-huit qui possède 4 dizaines et 8 unités ». Ou encore « Écris-moi le nombre soixante-douze qui possède deux unités et sept dizaines ».

Ne vous étonnez pas si les nombres 11 à 16 et les nombres 70 à 99 sont plus difficiles à lire et à écrire. Ceci se règlera avec le temps.

Écrivez des nombres et demandez à votre enfant de les lire. Dans un premier temps, il devra dire que le nombre possède, par exemple, 8 dizaines et 3 unités et ensuite il devra ajouter que c'est le nombre « quatre-vingt-trois ». Aidez-le au besoin pour cette dernière façon de dire les nombres.