Chapitre 11

Les relatifs et la fonction multiplicative

Dans ce chapitre, votre enfant sera placé dans une situation qui, il y a quelques siècles, a permis aux mathématiciens de comprendre que forcément « – x – = + » .

Il y apprendra des concepts vus à l'école entre 12 et 18 ans. Soyez donc compréhensif(ve). Ce qui devrait rester de ce chapitre concerne d'abord la connaissance de la loi des signes en multiplication, ensuite la perception qu'une expression algébrique peut être illustrée par un dessin tel une droite ou une parabole, entre autres.

Mais ce chapitre constituera un exercice de calcul où votre enfant développera surtout sa connaissance des tables de multiplication.

Évaluation

Dans ce chapitre, votre enfant démontre :

Sa compréhension :

- Lorsqu'il associe un rectangle ou un carré tracé dans un graphe cartésien à une égalité telle (-3) x (+4) = (-12) ;
- Lorsqu'il associe une expression algébrique à une droite ou à une parabole (voir problèmes 13 à 15).

Son raisonnement :

- Lorsqu'il complète des tableaux impliquant la multiplication d'entiers relatifs (Voir problèmes 1 à 8) ;
- Lorsqu'il trouve la valeur de variables dans une expression algébrique telle ab = -12 (voir problèmes 11 et 12).

Son efficacité :

- Lorsqu'il calcule généralement sans erreur ;
- Lorsqu'il connaît ses tables de multiplications.

Problème 1

Présentez la grille suivante à votre enfant.

X	+2	+5
+3	+6	+15

Montrez le symbole X situé dans le coin supérieur gauche en mentionnant qu'il indique que chaque nombre situé en haut de la grille, ici +2 et +5, doit être multiplié par chaque nombre situé à gauche de la grille, ici +3 et que le produit, c'est-à-dire la réponse de chaque multiplication, doit être inscrit dans les cases restantes vis-à-vis des nombres multipliés, ici +6 et +15 car
(+3) x (+2) = +6 et (+3) x (+5) = +15.

Invitez votre enfant à vérifier si les produits effectués ci-haut sont justes. Ensuite, mentionnez-lui qu'une autre vérification est possible. Il faut additionner les nombres de la ligne du haut, donc
+2 +5 = + 7 et multiplier le nombre obtenu par la somme des nombres de la colonne de gauche, ici il n'y a que +3. On multiplie les deux sommes (+3) x (+7) = +21 et on vérifie si ce nouveau produit est égal à la somme des nombres situés dans la grille, sauf ceux de gauche et ceux du haut, donc +6 + 15 = +21.

Puisque (+3) x (+7) = +6 +15 = +21, il n'y a pas d'erreur. Cela sera noté comme suit sous la grille :

X	+2	+5
+3	+6	+15

(+3) x (+2 +5) = +6 +15
(+3) x (+7) = +21

Problème 2

Au tour de votre enfant de compléter les grilles suivantes.

a)

X	+3	+5
+4		

b)

X	+6	+3
+5		

c)

X	+7	+3
0		

d)

X	+8	+7
+4		

e)

X	+9	0
+5		

f)

X	+5	+8
+6		

Assurez-vous que votre enfant a compris avant de passer au problème suivant. Au besoin, aidez-le avec ses tables de multiplication, mais dorénavant, au besoin, faites-lui mémoriser les tables de 0 x 0 à 9 x 9.

Problème 3

Cette fois, il y a deux nombres à additionner dans la colonne de gauche. Invitez votre enfant à procéder comme au problème précédent.

a)

X	+3	+7
+1		
+4		

b)

X	+8	+5
+4		
+3		

Note : Pour vérifier ces produits, permettez l'usage de la calculatrice. Nous désirons ici faire comprendre la loi des signes surtout.

Donc votre enfant peut effectuer en (b) (+7) x (+13) = +91 avec sa calculatrice.

c)

X	+9	+4
+6		
+5		

d)

X	+1	+7
+7		
+6		

e)

X	+8	+3
+7		
+9		

f)

X	+5	+9
0		
+4		

Continuez au besoin.

Problème 4

Jusqu'à maintenant, il fallait multiplier des + avec des +, ce qui est facile puisque
(+5) x (+7) = 5 x 7. Il n'est donc pas nécessaire de se préoccuper des signes +. Cette fois, nous placerons des signes « – » sur la ligne du haut. Laissez votre enfant tenter de résoudre les multiplications telle (+4) x (-3) = -12.

S'il ne se préoccupe pas des signes « – », la preuve montrera l'erreur. Évitez de lui dire que
«+ x – = – ou – x + = – ». Défiez-le de découvrir la réponse en lui mentionnant qu'il y a
très longtemps de grands mathématiciens ont dû y penser deux fois avant de trouver cette réponse.

Proposez donc la grille :

X	+8	-3
+4		

Au moment de la vérification, il faudra donc faire +8 –3 = +5 puis (+4) x (+5) = +20 et enfin
+32 –12 = +20.

Si votre enfant n'a pas placé le signe – devant le nombre 12, il aura +32 et +12 dans la grille, mais comme +8 –3 = +5 et (+5) x (+4) = +20, il devra découvrir comment arriver à +20 à partir de 32 et 12. Voici donc la solution de cette grille.

X	+8	-3
+4	+32	-12

(+4) x (+8 –3) = +32 – 12
(+4) x (+5) = +20

Problème 5

Voici d'autres grilles semblables.

a)

X	+6	-9
+2		

b)

X	-7	+2
+4		

c)

X	-5	0
+7		

d)

X	+4	+6
-3		

e)

X	-9	+8
+6		

f)

X	-8	+8
+3		

g)

X	+7	+4
-5		

h)

X	+2	+6
-8		

Continuez au besoin.

Problème 6

Cette fois, comme au problème 3, il y aura deux nombres dans la colonne de gauche.

a)

X	+3	-5
+4		
+2		

b)

X	-6	+8
+7		
0		

c)

X	-3	-5
+2		
+6		

d)

X	+7	+5
-2		
+6		

e)

X	+6	+4
+8		
-5		

f)

X	+2	+9
-3		
-5		

g)

X	+8	-2
+4		
+1		

h)

X	-3	0
+7		
+4		

Continuez au besoin.

<u>Problème 7</u>

Et voici le vrai problème ! Mentionnez à votre enfant qu'il a fallu plusieurs siècles avant que les mathématiciens réussissent à comprendre ce que doit être le produit de (-2) x (-3) par exemple. Mettez-le défi de prouver qu'il aurait pu les aider.

Montrez-lui donc la grille suivante.

X	+5	-2
+3		
-1		

Laissez votre enfant calculer les produits qui vont dans les cases vides. Le produit qui devrait causer un problème est (-2) x (-1). La réponse sera-t-elle – 2 ou +2 ? Pour le savoir, il suffit de faire la preuve, c'est-à-dire de trouver (+5 –2) X (+3 –1) donc 3 x 2 = 6. En remplissant les cases vides, votre enfant devrait obtenir +15 –6 –5 ±2 . En simplifiant cette expression, nous obtenons +4 ±2 . Or nous savons que +6 est le produit recherché, donc il faut obtenir dans les cases vides : +15 –6 –5 +2 = +6. D'où, (-2) x (-1) = +2.

<u>Problème 8</u>

Voici d'autres grilles à compléter. Votre enfant pourra vérifier que «– x – = + » chaque fois.

a)

X	-4	+1
-3		
+6		

b)

X	+7	-4
-3		
+2		

c)

X	-5	+5
+3		
-8		

d)

X	+9	-7
-6		
+8		

e)

X	0	+7
-3		
+2		

f)

X	-8	+2
-6		
+9		

g)

X	-10	+4
+5		
-3		

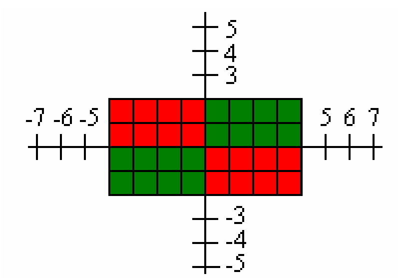
h)

X	+8	-3
-6		
+6		

Continuez au besoin.

<u>Problème 9</u>

Montrez à votre enfant le diagramme cartésien suivant.



Dites-lui que ce diagramme illustre les quatre produits suivants :

a) (+2) x (+4) = (+8)
b) (-2) x (+4) = (-8)
c) (-2) x (-4) = (+8)
d) (+2) x (-4) = (-8)

Demandez-lui d'observer le diagramme et d'y repérer les illustration des produits (a), (b), (c) et (d).

Solution

- a est vert et est un quadrant positif car (+2) x (+4) = (+8)
- b est rouge et est un quadrant négatif car (-2) x (+4) = (-8)
- c est vert et est un quadrant positif car (-2) x (-4) = (+8)
- d est rouge et est un quadrant négatif car (+2) x (-4) = (-8)

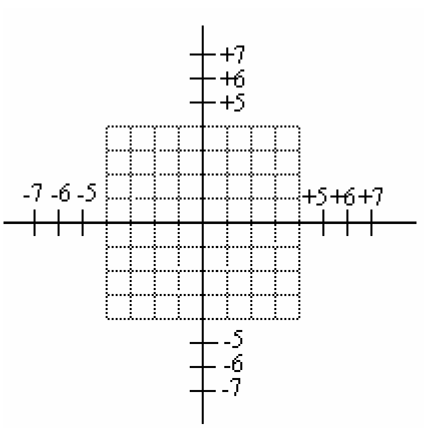
NOTE : La multiplication étant commutative, l'ordre des facteurs des diverses multiplications n'est pas important.

Note : Les 4 rectangles rappellent l'équipe des + et celle des – . Ils sont bien réels. Les + et – sont utilisés en maths pour représenter des états opposés comme ici la position de ces rectangles par rapport aux axes.

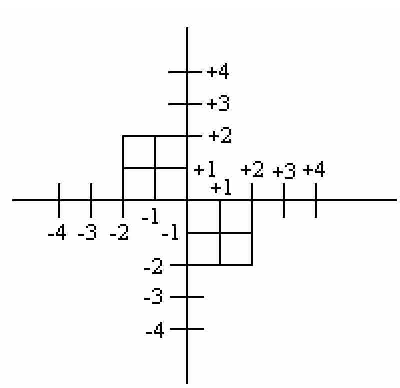
Problème 10

Dans le diagramme suivant, demandez à votre enfant de tracer les deux carrés de 9 cases situés dans les quadrants positifs et appuyés sur les axes tels les rectangles du problème 9.

Dites-leur que ces carrés peuvent être symbolisés par $\sqrt{9}$. Quels sont ces carrés ?



Demandez-lui ensuite de représenter le produit illustré par ces deux carrés. Les deux produits (+3) x (+3) = +9 et (-3) x (-3) = +9 ont les mêmes facteurs : (+3) dans le premier cas et (-3) dans le second. À cause de cela, nous pouvons dire que $\sqrt{9}$ = ±3, c'est-à-dire que la racine carrée de 9 peut être +3 ou –3, il y a 2 possibilités. Montrez maintenant le diagramme suivant.



Demandez-lui combien de cases possèdent chacun des carrés illustrés (4). Demandez-lui d'écrire l'égalité qui représente chaque carré. (**Solution** : (-2) x (+2) = -4 à gauche et (+2) x (-2) = -4 à droite, mais l'inverse est aussi vrai car l'ordre des facteurs n'a pas d'importance.)

Faites observer que les facteurs de ces deux rectangles sont différents (+2) n'est pas égal à (-2), alors nous ne pouvons faire $\sqrt{-4}$. Bref, pour faire la racine carré d'un nombre, ses facteurs doivent être identiques : même signe et même nombre. Donc, il faut que les deux nombres soient dans la même équipe.

Note : Évitez de dire que $\sqrt{-4}$ est impossible ou inexistante. En fait, elle est un nombre imaginaire, le nombre 2*i*. La lettre *i* est égale à la racine carrée de –1. Nous avons donc $\sqrt{-4}$ =

$$\sqrt{4 \times -1} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

Mais nous allons laisser les nombres imaginaires de côté pour l'instant. L'important est de ne pas dire que la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.

Problème 11

Voici des nombres déguisés. Demandez à votre enfant de trouver la valeur des variables (les lettres) qui transforment l'équation (ex. : ab = -6) en une égalité (ex. : (-2) x (+3) = -6 entre autres).

1. ab = -12 et a = 2

Notes : 1. Mentionnez à votre enfant que ab = a x b.
2. Rappelez au besoin que 2 = +2, donc a = +2.

2. cd = 15 et c = -3
3. ef = 0 et e = 4
4. gh = 16 et g = h (2 solutions)
5. kl = -10 et k = 2
6. mn = 13 et n = -1
7. $\sqrt{p} = \pm 5$
8. $r^2 = 36$ (Si nécessaire mentionnez que r^2 = r x r)
9. 2st = -24 et s = 4 (Note : 2st = 2 x s x t)
10. u = $\sqrt{-1}$ Oh ! Oh !

Solutions

1.	b = -6	2.	d = -5	3.	f = 0	4.	g = h = 4 et g = h = -4
5.	l = -5	6.	m = -13	7.	p = 25	8.	r = ± 6
9.	t = -3	10.	u est un nombre imaginaire.				

Problème 12

Demandez à votre enfant de trouver la valeur des expressions algébriques suivantes :

a)	$x^2 + 3x - 4$	si $x = 2$
b)	$x2 - x + 6$	si $x = 3$
c)	$2 x^2 + 4x + 7$	si $x = 0$
d)	$x^2 - 3x - 10$	si $x = -2$
e)	$x^2 - 5$	si $x = -3$
f)	$3x^2 - 4x + 9$	si $x = 1$
g)	$x^2 + 2x + 1$	si $x = 3$
h)	$x^2 + 2x + 1$	si $x = -3$
i)	$x^2 + 2x + 1$	si $x = 2$
j)	$x^2 + 2x + 1$	si $x = -2$
k)	$x^2 + 2x + 1$	si $x = 1$
l)	$x^2 + 2x +1$	si $x = -1$
m)	$x^2 + 2x + 1$	si $x = 0$
n)	$x^2 + 2x + 1$	si $x = -4$

Solutions

a)	6	b)	12	c)	7	d)	0
e)	4	f)	8	g)	16	h)	4
i)	9	j)	1	k)	4	l)	0
m)	1	n)	9				

Problème 13

Dites à votre enfant que les expressions algébriques, telles celles du problème 12 peuvent se transformer en dessins très spéciaux. Pour trouver le dessin représenté par $x^2 + 2x +1$, il faut d'abord trouver la valeur de $x^2 + 2x + 1$ pour diverses valeurs de x tel que cela a été fait dans le problème 12, de (g) à (n).

Demandez à votre enfant de compléter le tableau de données suivant.

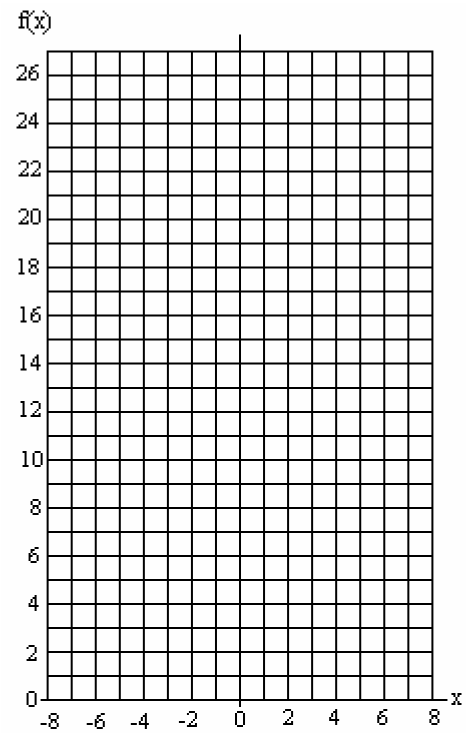
Valeurs de $x^2 + 2x +1 = f(x)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	9	4	1	0	1	4	9	16

Demandez à votre enfant ce que les nombres 0, 1, 4, 9 et 16 représentent. (Ce sont des carrés. En fait, $x^2 + 2x +1$ est un carré algébrique. Toutes les valeurs entières de x conduisent à un carré.)

Problème 14

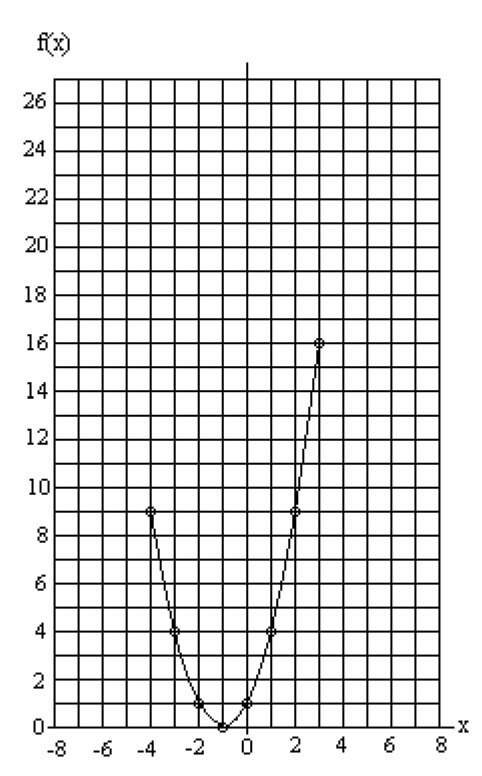
En utilisant les données du tableau du problème précédent, vous allez maintenant tracer le dessin représenté par $x^2 + 2x +1$.



Votre enfant trace les points (x, f(x)) à partir du tableau du problème 13. Dans ce but, il prend la valeur de x (disons –3) et la trouve sur l'axe des x, l'axe horizontal. Puis, comme dans le tableau, lorsque x = -3, f(x) = 4, il monte au-dessus du point –3 jusqu'à ce qu'il atteigne la ligne +4 sur f(x). Même exercice avec les autres points.

Il reste maintenant à relier ces points pour obtenir le dessin secret que les mathématiciens désignent par $x^2 + 2x +1$. Ce dessin est une parabole, la parabole $x^2 + 2x +1$.

Solution : Les côtés de la parabole se prolongent à l'infini. Il suffit de calculer en utilisant d'autres valeurs pour x.



Ce dessin représente une parabole, la parabole $x^2 + 2x + 1$.

Problème 15

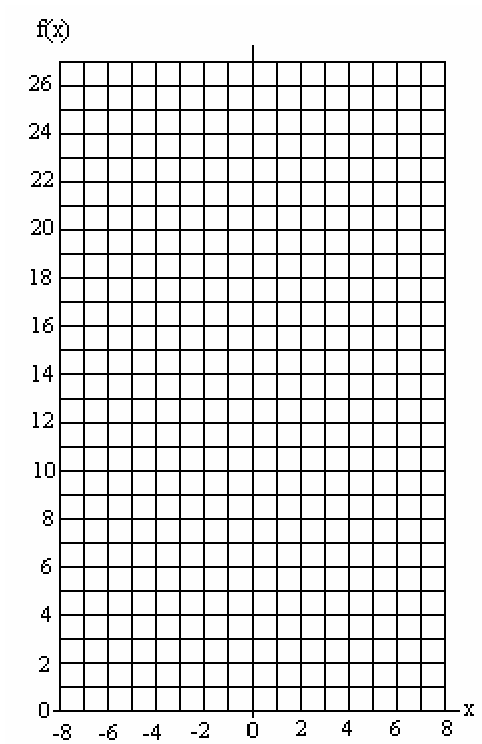
Voici une autre expression algébrique :

x + 4

Demandez à votre enfant de compléter le tableau suivant pour trouver le dessin que x + 4 cache.
(**Note** : f(x) = x + 4)

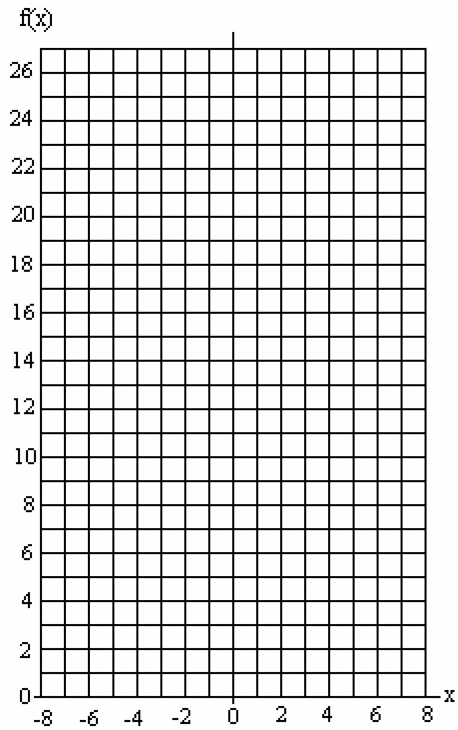
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	0								

Demandez à votre enfant de trouver le dessin comme il l'a fait au problème 14.



Et maintenant, quel dessin se cache sous f(x) = x – 5 ?

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)									



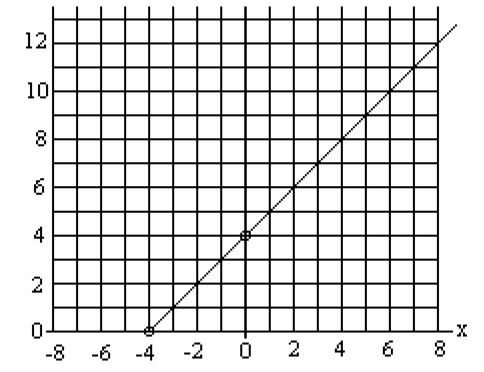
Continuez au besoin avec des expressions telles :

a) $2x + 1$ b) $x^2 – 1$ c) $4x$

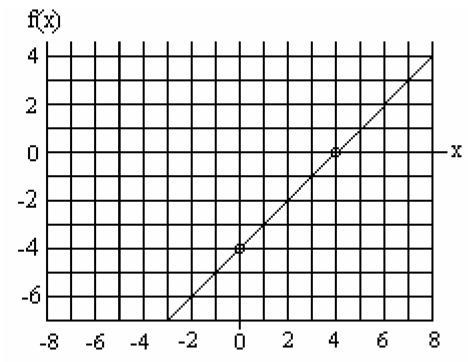
Solutions

a) $2x + 1$ représente une droite qui passe par (0,1) et (1,3)
b) $x^2 – 1$ représente une parabole qui passe par (0,-1), (1,0) et (2,3)
c) $4x$ représente une droite qui passe par (0,0), (1,4), (2,8)

Solution pour f(x) = x + 4



Solution pour f(x) = x – 4



<u>Note</u> : Pour obtenir des droites penchées dans l'autre sens, on aura des expressions telle f(x) = 4 – x .