Chapitre 2

Des nombres sous la loupe

Mise en scène

Si vous avez une lunette astronomique, une lunette terrestre, des jumelles, un microscope, une loupe ou une simple paire de lunettes, demandez à l'élève d'observer différents objets avec au moins un de ces instruments et demandez-lui de comparer les observations réalisées avec cet ou ces instruments et celles réalisées à l'œil nu.

Faites ressortir le fait que certains instruments permettent de voir des détails que l'œil ne voit pas toujours.

Avec une loupe, observez des images imprimées dans un journal. Vous remarquerez que ce qui, à l'œil nu, semble être une section colorée uniformément est en réalité composée d'une série de points colorés et d'espaces blancs.

Matériel

2 planches à calculer à 3 régions (voir problème 8);
une règle avec centimètres et décimètres;
Jetons.

Évaluation

Compréhension :

L'élève doit percevoir qu'une unité peut être subdivisée de multiples façons. De plus, il doit percevoir que les jetons placés sur sa planche à calculer peuvent représenter divers systèmes d'unités.

Raisonnement :

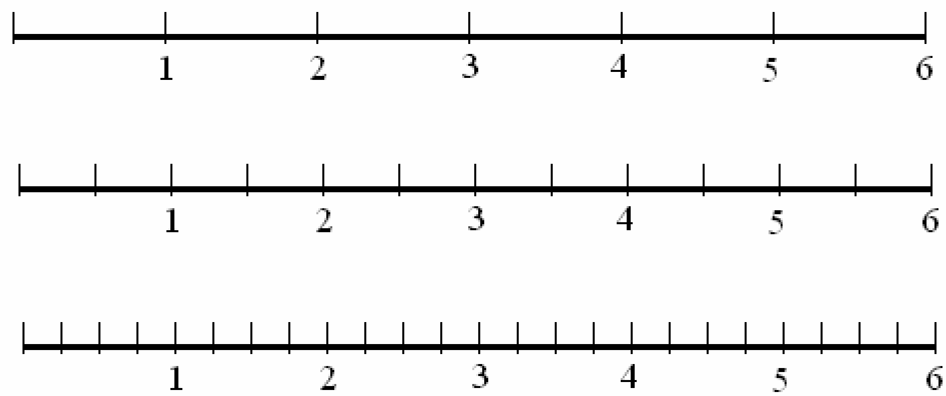
L'élève doit être capable d'établir des liens entre les diverses subdivisions de l'unité en comparant deux règles où figurent ces subdivisions. Ainsi il percevra que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ ou que $2/4 = \frac{1}{2}$. Il ne s'agit cependant pas encore de lui donner les trucs qui permettent de générer des fractions équivalentes.

Efficacité :

L'élève connaît le rôle de la virgule décimale et il peut lire des nombres décimaux jusqu'à la position des millièmes.

Problème 1

Montrez les règles suivantes à l'élève.

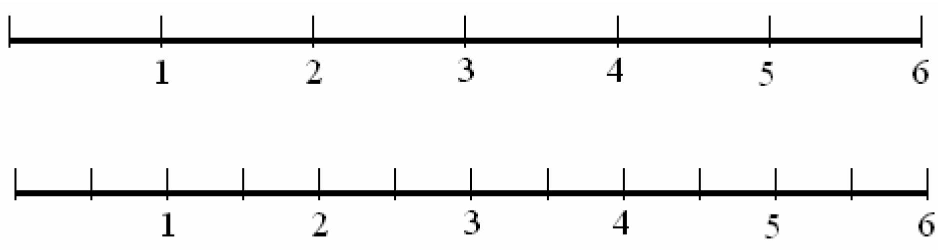


Rappelez les expériences avec les instruments optiques. Établissez une analogie avec ces expériences et les règles illustrées plus haut. C'est comme si la première était vue à l'œil nu, seuls les nombres entiers sont visibles. Puis, avec une loupe, il est possible de voir des points qui sont situés à mi-chemin entre deux nombres entiers voisins. Ces points sont des demies. Avec une loupe plus forte encore, d'autres détails apparaissent : des points qui sont situés entre chaque entier et chaque demie.

Montrez à l'élève qu'il serait encore possible de placer d'autres points entre les points déjà indiqués.

Problème 2

Reprenons les deux premières règles.

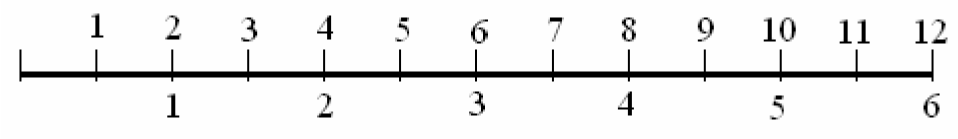


Demandez à l'élève d'imaginer que chaque point numéroté sur la première règle représente l'endroit ou un personnage pose un pied en avançant. Combien fait-il de pas pour aller d'une extrémité à l'autre de cette ligne (6 pas – *<u>Note</u> : Certains élèves trouvent 7 pas car ils comptent le point de départ. Mentionnez-leur qu'ils n'ont, à ce point, encore rien fait, qu'il faut avancer pour pouvoir compter*.)

Montrez la deuxième règle et racontez à l'élève que cette fois, le personnage fait des pas qui sont deux fois plus petits. Combien en fait-il ? (12 pas – Laissez l'élève compter chaque pas.)

Proposez de numéroter ces pas au-dessus de la règle. Vous obtiendrez la règle du problème 3. N'allez pas plus loin, les problèmes que soulève cette double numérotation vont servir bientôt.

Problème 3



Prenez la règle qui précède, telle que construite au problème 2.

Dites à l'élève qu'un personnage part de l'extrémité gauche et avance de 5 pas. Où est-il rendu ?

Notes : 1. Il y a évidemment deux possibilités, selon que l'élève choisisse la numérotation située au-dessus de l'axe ou celle située en-dessous. Quel que soit son choix, dites-lui que la réponse n'est pas bonne et indiquez la réponse en utilisant l'autre série de nombres.
2. Il est possible que l'élève hésite, qu'il mentionne qu'il a deux choix. Laissez-le vous expliquer clairement son dilemme avant de passer directement au problème 4.

Si la réponse de l'élève au problème précédent ressemble à celle que la note 1 décrit, posez-lui le problème suivant.

Nous allons faire un autre essai. Cette fois, un personnage qui est parti de la gauche avance de 3 pas. Où est-il rendu ?

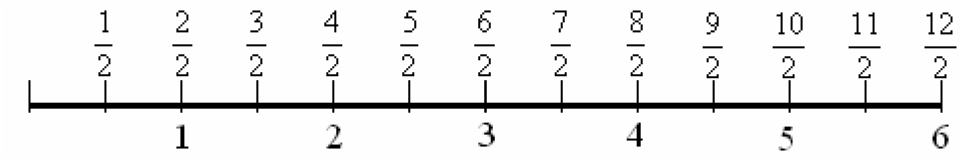
Notes : 1. Encore une fois, si l'élève choisit un des deux systèmes de numérotation, dites-lui que le personnage a choisi l'autre système.
2. Si l'élève hésite, voir la note 2 ci-haut.

Proposez de nouveaux problèmes jusqu'au moment où l'élève hésite et mentionne clairement qu'il y a deux possibilités.

Problème 4

L'élève a déjà perçu qu'il faut distinguer les deux systèmes de numérotation de l'axe vus précédemment. Proposez que le système inscrit au dessus de l'axe soit le système des demies alors que l'autre système sera le système des entiers. C'est comme s'il y avait deux familles : la famille des entiers et la famille des demies. Ou encore comme si des gens parlaient des langues différentes : la langue des entiers et la langue des demies.

Montrez donc l'axe suivant à l'élève



Demandez à l'élève comment se disent :

a) $\frac{6}{2}$ dans la langue des entiers. (3 entiers)
b) 5 entiers dans la langue des demies (10 demies)
c) $\frac{4}{2}$ dans la langue des entiers (2 entiers)
d) 4 entiers dans la langue des demies (8 demies)
e) 0 demie dans la langue des entiers (0 entier)
f) 7 entiers dans la langue des demies (14 demies)

Note : Ne montrez pas de trucs, laissez l'élève se débrouiller.

g) 20 demies dans la langue des entiers (10 entiers)
h) 5 demies dans la langue des entiers (2 entiers et ½).

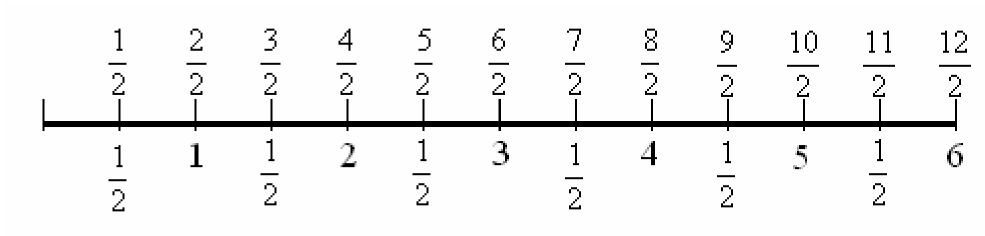
Note : C'est 2 entiers et une demie, mais il est possible que l'élève dise que ce n'est pas possible ou que cela est entre 2 et 3 entiers. C'est très bien ainsi.

Problème 5

Au problème 4 (h), l'élève a pu constater que parfois la langue des entiers n'était pas assez précise. Alors, il faudra apprendre, aux gens qui parlent la langue des entiers, un peu de la langue des demies.

Demandez à l'élève comment se disent 9 demies dans la langue des entiers.

- Est-ce plus ou moins que 5 entiers (moins)
- Est-ce plus ou moins que 4 entiers ? (plus)
- Combien y a-t-il de demies de trop pour que nous obtenions 4 entiers ? (Une seule).
- Alors, voici un nouvel axe où les gens qui parlent la langue des entiers parlent aussi la langue des demies lorsque c'est nécessaire.



Montrez à l'élève que $\frac{9}{2}$ c'est 4 entiers et 1 demie ou $4\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'il faut avancer jusqu'à 4 entiers et avancer encore de la demie d'un entier.

Demandez-lui de traduire dans la langue des demies :

a) $3\frac{1}{2}$ ($\frac{7}{2}$)

b) $5\frac{1}{2}$ ($\frac{11}{2}$)

c) $2\frac{1}{2}$ ($\frac{5}{2}$)

d) $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$)

<u>Note</u> : Le problème (d) est si facile que l'élève peut hésiter. Vous pouvez écrire que c'est comme $0\ \frac{1}{2}$.

e) $7\frac{1}{2}$ ($\frac{15}{2}$)

Et maintenant, demandez-lui de traduire dans la langue des entiers et des demies, si nécessaire.

f) $\frac{4}{2}$ (2)

g) $\frac{3}{2}$ (1½)

h) $\frac{13}{2}$ (6½)

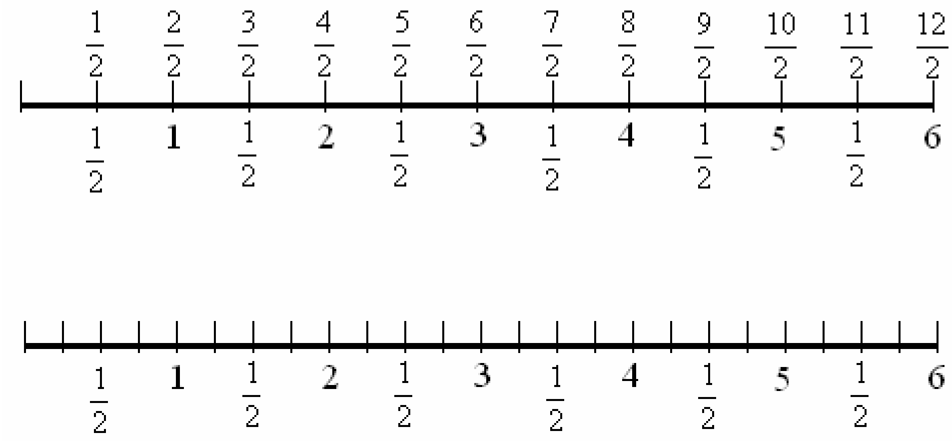
i) $\frac{11}{2}$ (5½)

j) $\frac{8}{2}$ (4)

k) $\frac{7}{2}$ (3½)

<u>Problème 6</u>

Présentez à l’élève les deux axes suivants.



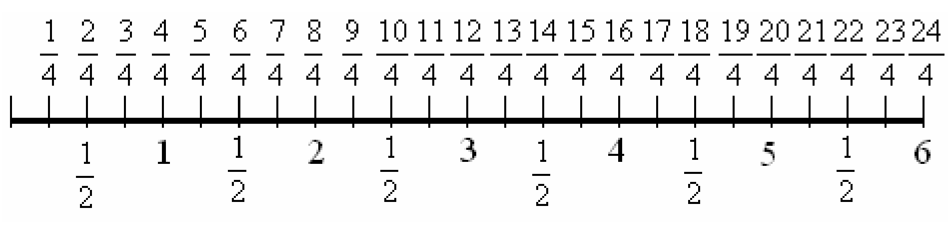
Faites remarquer à l’élève que de nouveaux points sont apparus sur l’axe des nombres et qu’il faut les numéroter eux aussi. Il faudra leur donner un nouveau nom pour ne pas les confondre avec la famille des entiers et avec la famille des demies. Quel sera le nouveau nom ?

<u>Notes</u> : 1. C’est la famille des quarts. Il est fort probable que l’élève ne découvre pas ce nom par lui-même. Par contre, il devrait comprendre assez facilement que les nombres de cette famille sont $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$ et pouvoir les situer correctement sur le dessus de l’axe.

2. Considérez que, pour l’instant, il s’agit de construire une image mentale permettant de visualiser les fractions. De plus, il s’agit pour l’élève de comprendre que des noms différents doivent être associés à chaque type de fractionnement. Connaître ces noms (demies, quarts,…) n’est pas encore requis.

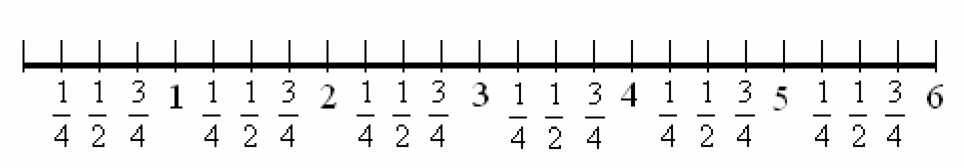
3. Assurez-vous cependant que l’élève comprend bien le sens des dénominateurs, jusqu’ici 2 et 4, qui montrent en combien de parties égales l’entier a été subdivisé.

Numérotez donc le nouvel axe pour obtenir :



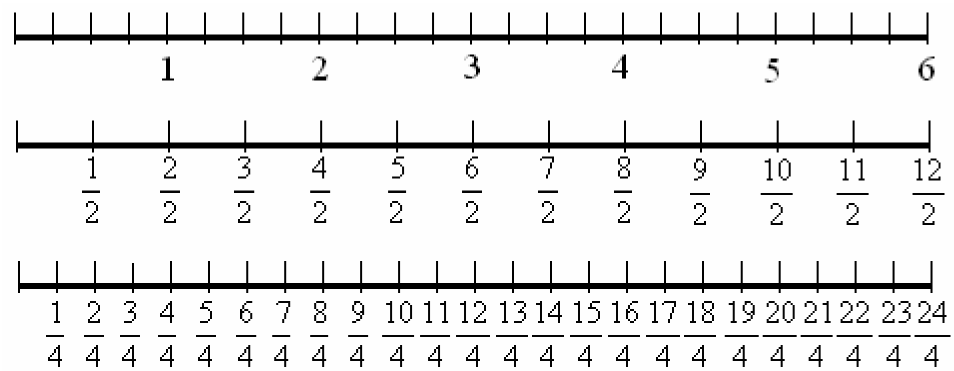
Complétez maintenant la section inférieure de l’axe en commençant par l’intervalle entre 0 et 1.

Montrez ensuite que cet intervalle ressemble à l’intervalle entre 1 et 2 et complétez sa numérotation. Procédez de la même façon jusqu’au dernier intervalle. Vous obtiendrez donc :



Problème 7

Présentez à l'élève les trois axes qui suivent :



Demandez-lui de trouver à quel nombre correspond :

a) 3 entiers dans la famille des quarts ($\frac{12}{4}$)

b) 3 demies dans la famille des quarts ($\frac{6}{4}$)

c) 2 entiers et 1 demie ou $2\frac{1}{2}$ dans la famille des quarts ($\frac{10}{4}$)

d) 20 quarts ou $\frac{20}{4}$ en demies ($\frac{10}{2}$)

e) 20 quarts en entiers (5)

f) 6 quarts ou $\frac{6}{4}$ en demies ($\frac{3}{2}$)

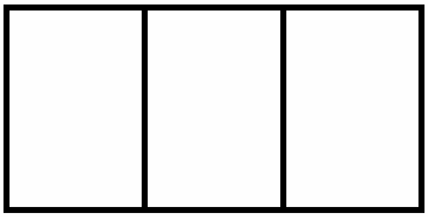
g) 6 quarts en entiers ($1\frac{1}{2}$)

h) 40 quarts en entiers (10)

Continuez au besoin afin de vous assurer que l'élève établit facilement des équivalences entre les entiers, les demies et les quarts. Le problème suivant servira à consolider ces équivalences.

Problème 8

Voici une planche à calculer.



Tracez-en une semblable sur une feuille de papier d'au moins 8 pouces ½ sur 11 pouces ou 21 cm sur 28 cm. Utilisez tout l'espace disponible.

Placez un jeton dans la section qui est à gauche. Ce jeton représente un entier. Demandez à l'élève combien un entier renferme-t-il de demies ? (2)

Enlevez le jeton placé à gauche et remplacez-le par deux jetons dans la section du centre. Mentionnez que cette section représente des demies donc que le jeton situé dans la section des entiers peut être remplacé par deux jetons dans la section des demies.

Mentionnez que la section de droite est celle des quarts. Demandez à l'élève combien de quarts peuvent remplacer une demie (2).

Remplacez donc un des jetons situé au centre par deux jetons que vous placerez dans la section des quarts. Faites de même avec l'autre jeton situé au centre. Résumez à l'élève ce qui vient de se passer. Nous avions un entier et l'avons remplacé par deux demies. Est-ce normal ? (Oui, car $1 = \frac{2}{2}$) Puis, ces deux demies sont devenues 4 quarts. Pourquoi ? (Parce que $1 = \frac{4}{4}$ et $\frac{2}{2} = \frac{4}{4}$.)

Assurez-vous que l'élève comprend bien ces transformations. Au besoin, utilisez les axes du problème 7.

<u>Problème 9</u>

Nous allons maintenant jouer avec les équivalences entre les entiers, les demies et les quarts.

a) Demandez à l'élève de placer 1 jeton sur chaque section de sa planche. Demandez-lui de transformer cette représentation afin de n'obtenir que des quarts. Notez ces transformations comme suit : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.

b) Même travail avec 2 entiers et 1 demie. (Solution : $2+\frac{1}{2}=\frac{10}{4}$)

c) Idem avec 3 entiers, 2 demies et 1 quart. (Solution : $3+\frac{2}{2}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$)

d) Sur la planche à calculer, placez 1 entier, 1 demie et 2 quarts. Demandez à l'élève d'effectuer les transformations qui lui permettront de n'obtenir que des demies. Notez $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{4}{2}$.

e) Même question avec 2 entiers + 2 demies + 2 quarts. (Solution : $2+\frac{2}{2}+\frac{2}{4}=\frac{7}{2}$)

f) Idem avec 3 entiers + 1 demie + 4 quarts ($3+\frac{1}{2}+\frac{4}{4}=\frac{9}{2}$)

g) Demandez à l'élève de modifier les représentations suivantes afin qu'il ne subsiste que le moins de jetons possibles. Notez les transformations.

- 1 entier + $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=3+\frac{1}{4}$ (Il reste donc 4 jetons.)
- 0 entier + $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$ (Il reste donc 1 jeton.)
- 2 entiers + $\frac{5}{2}+\frac{5}{4}=5+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ (Il reste donc 7 jetons.)
- 1 entier + $\frac{2}{2}+\frac{3}{4}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ (Il reste donc 4 jetons.)

Continuez au besoin.

Problème 10

Partager un entier en demies, puis en quarts,… est ce qu'il y a de plus facile. Nos ancêtres l'on fait abondamment et nous utilisons encore ces fractionnements. Établissez des parallèles entre le travail fait à date et diverses applications :

- la douzaine d'œufs et la demi-douzaine ;
- l'heure, la demi-heure, le quart d'heure ;
- l'année, le semestre et le trimestre ;
- le pouce, le demi-pouce et le quart de pouce ;
- la façon de couper les pizzas : en demies, puis en quarts et en huitièmes ;
- Un match de football, la demie et le quart.

Problème 11

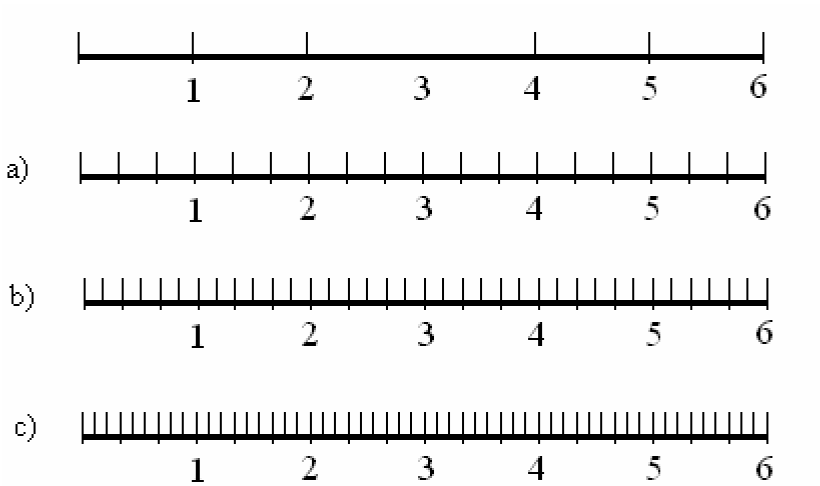
Demandez à l'élève de plier une feuille de papier en trois parties de même grandeur.

Notes : 1. Ce travail est très difficile. Voilà pourquoi la division de l'entier en demies, en quarts,… a été favorisée.

2. Laissez l'élève constater la difficulté. Il n'est pas important qu'il réussisse le problème. L'important est qu'il constate la difficulté de diviser par 3 au lieu de par 2.

Problème 12

Présentez à l'élève les axes suivants.



À quelle famille appartient l'axe :

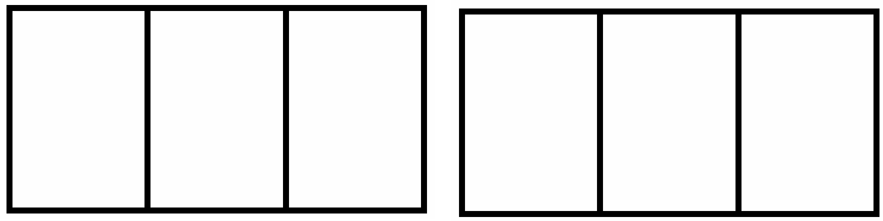
- (a) ? (les tiers)
- (b) ? (les sixièmes)
- (c) ? (les neuvièmes)

À partir de maintenant, insistez sur le nom des fractions. Normalement, les noms les plus difficiles sont : les demies, les tiers et les quarts que les élèves ont tendance à appeler : des deuxièmes, des troisièmes et des quatrièmes, respectant ainsi la règle générale qui s'applique à compter des cinquièmes. Il faut cependant constater que ces noms qu'ils inventent montrent qu'ils ont bien compris. Il leur manque seulement quelques connaissances d'usage.

Problème 13

Prenez une règle graduée en centimètres et en millimètres. Demandez à votre enfant de trouver en combien de parties chaque entier (ici des centimètres) a été subdivisé (en dix parties). Mentionnez-lui qu'il y a très longtemps, nos ancêtres ne divisaient les unités qu'en 2, puis en 4, puis en 8,… Mais il y a un peu plus de deux siècles, ils étaient devenus plus habiles et ont alors décidé qu'en mesure, comme en dénombrement, ils allaient utiliser le nombre 10 comme base de groupement et de subdivision.

Prenez deux planches à calculer régulières à 3 régions chacune. Placez-les côte à côte comme suit :



Placez un jeton dans la case de droite de la planche de gauche. Annoncez à votre enfant que ce jeton représente un dollar.
Demandez-lui ce que représente alors un jeton placé dans la case centrale de la planche de gauche (10$).
Demandez-lui ce que représente alors un jeton placé dans la case de gauche de la planche de gauche (100$).
Et maintenant que représente un jeton place dans la case de gauche de la planche de droite (10 cents).
Et un jeton placé dans la case centrale de la planche de droite (1 cent).
Et que représente un jeton placé dans la case de droite de la planche de droite ? (Un dixième de cent, mais aucune pièce de ce genre n’existe).

Demandez-lui maintenant de trouver combien il y a de billets de dix dollars dans un billet de cent dollars (10). Servez-vous de la planche pour rappeler quel jeton représente les billets de 100$ et quel jeton représente les billets de 10$
Et combien faut-il de pièces d’un dollar pour obtenir un billet de dix dollars. Procédez comme précédemment.
Continuez ainsi jusqu’à comparer les pièces d’un cent aux pièces de dix cents afin de consolider la relation 1 pour 10 entre cases voisines.

Vous allez maintenant faire comme précédemment mais en comparant deux cases séparées par une case.

Demandez donc à votre enfant de trouver combien il faut de pièces d’un dollar pour obtenir un billet de 100$ (100).
Puis de pièces de 10 cents pour obtenir un billet de dix dollars (100).
Enfin, de pièces d’un cent pour obtenir une pièce d’un dollar (100).
Faîtes remarquer à votre enfant que le mot cent vient du mot centimes et du mot centièmes et il indique que la pièce d’un cent est équivalente à un centième de la pièce d’un dollar.

<u>Problème 13</u>

Avec les deux planches à calculer placées comme au problème 12, demandez à votre enfant d’illustrer le nombre 1234.

Note : S'il vous demande où situer un de ces chiffres en indiquant, par exemple qu'il peut commencer à gauche avec le 1 ou à droite avec le 4, placez une virgule entre le 2 et le 3 pour séparer la planche des unités (donc celle de gauche) de celle des fractions d'unités.

S'il ne pose aucune question, laissez-le faire. Lorsqu'il aura terminé, dites-lui qu'il fallait placer ses jetons plus à droite ou plus à gauche, selon la disposition qu'il a utilisé. Bref, faîtes en sorte qu'il constate qu'une convention est nécessaire ici pour placer les jetons correctement. Cette convention sera donc la suivante : la virgule sépare la planche des unités (ici celle de gauche) de celle des fractions d'unités.

Demandez maintenant à votre enfant de placer les nombres suivants sur ses deux planches :

a) 3,162 b) 12,43 c) 6,003 d) 100,001 e) 0,321

Continuez au besoin.

Reprenez maintenant les nombres écrits plus haut et apprenez à votre enfant à les lire. Faites-lui constater qu'en lisant ces nombres, il faut dire où est la virgule ou encore, dire sur quelle planche sont les jetons. Ainsi, pour 12,43 nous dirons qu'il y a 12 unités c'est-à-dire 12 jetons sur la planche des unités et 43 centièmes pour dire à la fois que ces jetons sont sur la planche des fractions d'unités et pour indiquer jusqu'à quelle case nous avons placé des jetons, ici la case des centièmes. Donc 12,43 se lit 12 unités et 43 centièmes.

Continuez ainsi avec les nombres ci-haut et avec d'autres nombres si nécessaire.

Problème 14

Prenez des nombres tels ceux du problème 13 et demandez à votre enfant de les placer sur ses planches à calculer. Demandez-lui de lire chaque nombre en l'interprétant d'abord tel un simple nombre (ex. : 12,345 c'est 12 unités et 345 millièmes), puis comme une mesure en mètres (cette fois, c'est 12 mètres et 345 millièmes ou millimètres), puis en litres (donc 12 litres et 345 millièmes ou millilitres), puis en dollars ou en Euros (donc 12 dollars et 345 millièmes ou 34½¢ ou encore 12 Euros et 345 millièmes), puis en Zong (donc 12 zongs et 345 millièmes).

Note : Le Zong est une unité fictive qui remplace toutes les autres possibilités. Elles sert à généraliser la compréhension de la lecture des nombres, à montrer à l'enfant que quelle que soit l'unité, les mêmes règles de lecture et d'écriture s'appliquent.