Chapitre 8

La fonction multiplicative

NOTE : Il est préférable que ce chapitre soit fait en parallèle avec le chapitre 9.

Ce chapitre est hardi. Il vise à faire associer chez l'élève le rectangle et la multiplication. Il vise aussi à développer la perception selon laquelle toutes les multiplications peuvent être associées au rectangle, que l'on utilise des nombres entiers, des nombres décimaux ou des nombres algébriques. Dans un prochain chapitre nous verrons que cette image mentale s'applique aussi à la multiplication de fractions.

Vous penserez sans doute que les problèmes de ce chapitre ne font qu'effleurer le sujet. En fait, c'est vrai et c'est également suffisant pour développer les compréhensions fondamentales qui rendront facile l'apprentissage de la multiplication, de la division, de la factorisation et de l'extraction de racine carrée sur tous les types de nombres. Plus tard, nous y reviendrons en visant alors le développement des habiletés en calcul.

Matériel

- Le matériel dit de base dix, soit des centicubes, des bandes de 1 cm sur 10 cm et des carrés de 10 cm sur 10 cm.
- Une règle graduée en centimètres.
- Une règle graduée en pouce.

Évaluation

Dans ce chapitre, votre enfant manifeste :

Sa compréhension :

1. Lorsqu'il associe les rectangles construits avec du matériel aux grilles utilisant des nombres entiers, des nombres décimaux et des nombres algébriques ;
2. Lorsqu'il traduit par une égalité les multiplications illustrées par les grilles de calcul.

Son raisonnement :

Lorsqu'il trouve les nombres manquants dans une grille illustrant une multiplication.

Problème 1

Prenez le matériel dit « de base dix », c'est-à-dire les carrés d'un centimètre de côté, les rectangles de 1 cm sur 10 cm et les carrés de 10 cm sur 10 cm.

Assurez-vous d'abord que votre enfant comprend bien qu'il faut 10 petits carrés pour recouvrir le rectangle, c'est-à-dire que le rectangle a la même largeur que le carré, mais est dix fois plus long que lui. De la même façon, assurez-vous qu'il comprend bien qu'il faut 100 petits carrés pour recouvrir le grand carré qui a dix fois la largeur et dix fois la longueur du petit carré.

Demandez donc à votre enfant : « Si le petit carré est une unité, combien d'unités représente le rectangle ? » (10 unités) « Et combien d'unités représente le grand carré ? » (100 unités)

Continuez comme suit.

- Et si le grand carré est une unité, que devient le rectangle ? (C'est un dixième de l'unité.)
- Et que devient alors le petit carré ? (C'est un centième de l'unité.)

Assurez-vous que votre enfant comprend bien que la valeur attribuée à ces trois pièces peut varier.

Poursuivez en mentionnant que les mathématiciens ont pris l'habitude de représenter par des lettres ces valeurs ou quantités qui peuvent varier. Écrivez : $a < 5$ et demandez quelle peut être la valeur de a. (Il y a une infinité de possibilités : 3, ½, -5,… Assurez-vous que votre enfant comprend bien que a peut remplacer plusieurs nombres.)

Problème 2

Prenez la règle graduée en centimètres et demandez à votre enfant de mesurer la largeur du grand carré en centimètres. (10 cm)

Montrez-lui que les lignes qui sont placées entre les centimètres servent à mesurer en millimètres. Demandez-lui combien mesure le côté du grand carré en millimètres. (100 millimètres)

Mentionnez maintenant que 10 centimètres valent 1 décimètre. Demandez quelle est la longueur du côté du grand carré en décimètres. (1 décimètre).

Résumez en mentionnant que la longueur du côté du grand carré peut donc être une unité, si l'unité choisie est le décimètre, de dix unités si celle-ci est le centimètre et de 100 unités si l'unité est le millimètre.

Problème 3

Prenez la règle graduée en pouces. Si votre enfant n'a jamais travaillé avec une règle graduée en pouces, contentez-vous de lui dire que le pouce est une autre unité de mesure. Demandez-lui de mesurer la longueur du côté du grand carré en pouces. (4 pouces)

Demandez-lui de vous indiquer quelle est la longueur approximative d'un demi-pouce en lui indiquant où sont les demis sur la règle graduée en pouces.

Demandez-lui combien de demi-pouce mesure le côté du grand carré. (8)

Procédez de la même façon avec le quart de pouce, puis le huitième.

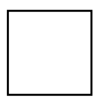
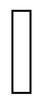
Résumez en mentionnant qu'avec le système des pouces et des fractions de pouce, la longueur du côté du grand carré peut mesurer 4 unités, si l'unité est le pouce, 8 unités, si l'unité de mesure est le demi-pouce ou encore 16 unités, si l'unité de mesure est le quart de pouce.
Tirez la conclusion que puisque l'unité de mesure peut varier, nous pouvons dire que la longueur du côté du grand carré est x.

Profitez-en pour donner aussi un nom à la longueur du côté du petit carré, ce sera y.

Mentionnez que d'autres lettres peuvent être choisies, qu'il suffit de prendre deux lettres différentes pour montrer que les longueurs sont différentes. Ainsi, votre enfant pourrait se servir des lettres formant ses initiales pour désigner les longueurs des côtés de ces deux carrés ou de l'initiale de votre prénom et de celle de son prénom.

Problème 4

Dites à votre enfant qu'il dispose désormais de plusieurs façons pour désigner son matériel (grand carré, rectangle et petit carré). C'est un peu comme s'il y avait plusieurs langues mathématiques.

Le matériel / **La langue**			
Langue des entiers	Centaine	Dizaine	Unité
Langue des décimales	Unité	Dixième	Centième
Langue algébrique	x^2 ou xx	xy	y^2 ou yy

Assurez-vous que votre enfant comprend bien les divers éléments de la langue algébrique. Le grand carré s'appelle x^2 (x carré) car sa longueur est x et sa largeur aussi. Nous pourrions aussi dire xx, mais les mathématiciens préfèrent x^2.

Le petit carré est donc y^2. Le rectangle possède un côté x et un côté y donc, c'est xy.

Note : Il peut arriver que votre enfant souhaite identifier le rectangle avec d'autres lettres que x et y. Mentionnez-lui que les mathématiciens essaient toujours de simplifier. Ainsi, si deux longueurs sont identiques, tel le côté du grand carré et le grand côté du rectangle, ils leur donnent le même nom, la même lettre. Après tout, si nous mesurons en centimètres, nous aurons la même longueur dans les deux cas.

Demandez donc à votre enfant de prendre :

a) 3 centaines + 2 dizaines + 1 unité.
b) 5 centièmes + 4 dixièmes + 3 unités.
c) $2x^2 + 3xy + 4y^2$

Note : Quelle que soit la réponse de votre enfant à ce dernier problème, demandez-lui de trouver une autre possibilité. (Solution : $2x^2$ peut désigner aussi bien 2 grands carrés que 2 petits carrés. Il en va de même de $4y^2$.)

d) 5 unités +12 dizaines + 3 centaines.

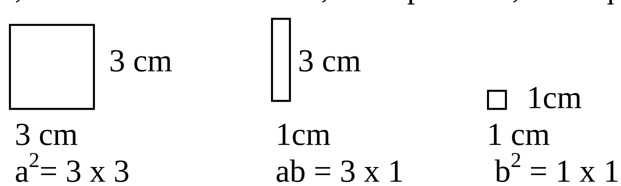
Note : Demandez à votre enfant de trouver une solution plus simple, c'est-à-dire avec moins de pièces. (Solution : 4 centaines + 2 dizaines + 5 unités.)

e) 5 dixièmes + 14 centièmes + 1 unité. (Même question qu'en (d) pour trouver 1 unité + 6 dixièmes + 4 centièmes.)
f) $3a^2 + 16ab + 4b^2$

Note : Les x et y sont devenus des a et des b. Du pareil au même.

Même question qu'en (d).

Note : Cette fois, aucune solution différente ne peut être trouvée car rien n'indique qu'il faut 10ab pour obtenir $1a^2$. Certes, avec le matériel actuel, c'est possible, mais que se passerait-il si le matériel était le suivant :

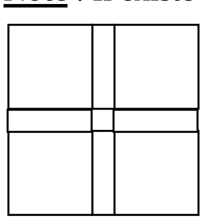


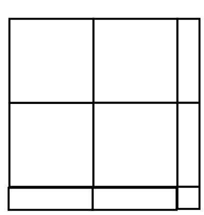
Pour vous assurer que votre enfant comprend bien ce qui se passe ici, découpez des pièces en respectant ces dernières mesures. Rappelez à votre enfant qu'en algèbre, une lettre peut prendre de nombreuses valeurs. Or si nous ne savons pas si a est plus grand ou plus petit que b, nous ne pouvons rien changer.

Problème 5

Demandez à votre enfant de prendre $4x^2 + 4xy + 1y^2$ et de faire un dallage carré avec ce matériel.

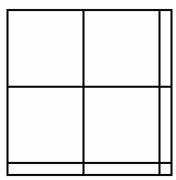
Note : Il existe de nombreuses dispositions équivalentes dont :





Laissez votre enfant en trouver quelques-unes. Chaque fois qu'une solution est trouvée, demandez-lui de vous mentionner la largeur du carré. Ce sera toujours $2x + 1y$.

Choisissez la disposition de droite dans la note précédente en la codifiant tel que fait ci-après :



	2x	+ 1y
2x	$4x^2$	$2xy$
+ 1y	$2xy$	$1y^2$

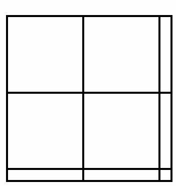
Assurez-vous que votre enfant comprend bien comment chaque groupe de symboles représente le dessin de gauche et ce que l'on peut faire avec le matériel.

Mentionnez au départ que, dans le tableau de droite, toutes les cases ont les mêmes dimensions pour mieux pouvoir écrire les symboles.

Donc :

$4x^2$: ce sont les 4 grands carrés.
$2xy$: ce sont 2 rectangles et on retrouve 2 rectangles à deux endroits.
$1y^2$: c'est le petit carré.
$2x + y$ c'est la largeur du côté.

Ajoutez maintenant deux nouveaux tableaux, ceux qui utilisent la langue des entiers.

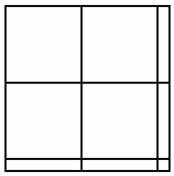


	2 dizaines	+ 1 unité
2 dizaines	4 centaines	2 dizaines
+ 1 unité	2 dizaines	1 unité

	20	+ 1
20	400	20
+ 1	20	1

Assurez-vous ici encore que votre enfant voit les liens entre le matériel ou le dessin de gauche et les tableaux de droite.

Enfin, passez à la langue décimale.



	2 unités	+ 1 dixième
2 unités	4 unités	2 dixièmes
+ 1 dixième	2 dixièmes	1 centième

	2	+ 0,1
2	4	0,2
+ 0,1	0,2	0,01

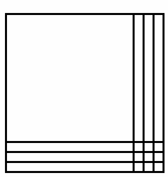
Problème 6

a) Écrivez : $\sqrt{1x^2 + 6xy + 9y^2}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{1{,}69}$

Mentionnez à votre enfant que ce nouveau symbole signifie « extraire la racine carrée », c'est-à-dire faire un carré avec le matériel décrit sous le trait horizontal afin de trouver la largeur du carré formé.

Demandez à votre enfant de choisir la langue qu'il va utiliser pour ce problème : celle de l'algèbre, celle des entiers ou celle des décimales.

Par la suite, invitez-le à faire sa construction et ensuite à la noter dans un tableau comme ceux du problème précédent. Voici donc les 3 solutions possibles, selon la langue choisie.



	1x	+ 3y
1x	$1x^2$	3xy
+ 3y	3xy	$9y^2$

	10	+ 3
10	100	30
+ 3	30	9

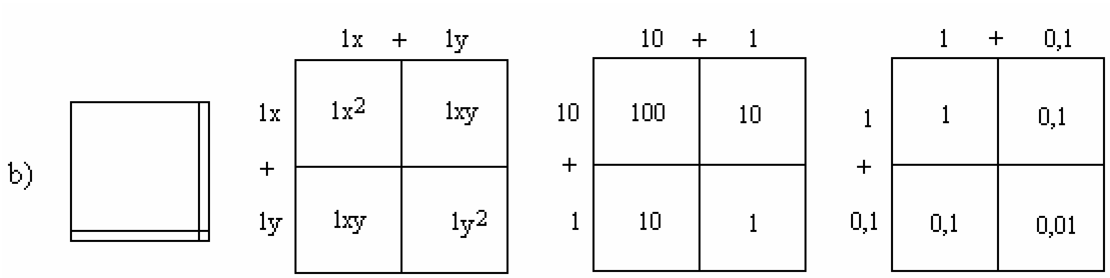
	1	+ 0,3
1	1	0,3
+ 0,3	0,3	0,09

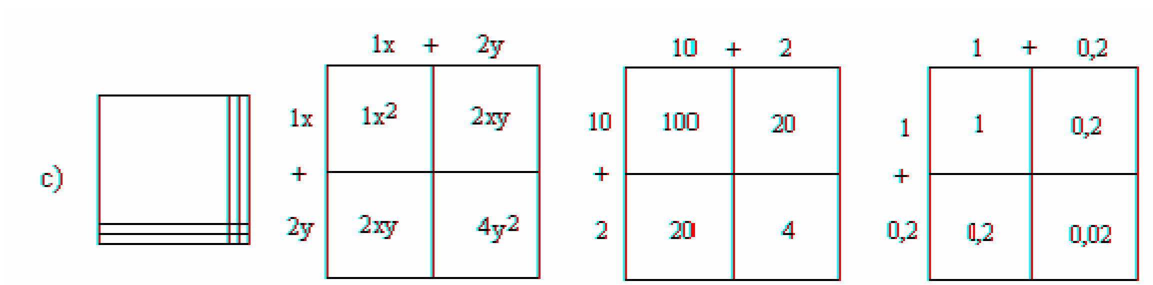
Note : pour les problèmes (b) et (c) qui suivent, votre enfant devra prendre les deux « langues mathématiques » qu'il n'a pas utilisées ou choisies pour le présent problème.

b) $\sqrt{1x^2 + 2xy + 1y^2}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{1{,}21}$

c) $\sqrt{1x^2 + 4xy + 4y^2}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{1{,}44}$

Solutions





Problème 7

Dans le présent problème, votre enfant constatera sans doute que la racine carrée d'un nombre algébrique est parfois plus facile à trouver que celle d'un nombre entier. La raison en est simple, comme nous ne pouvons être certains des valeurs relatives des variables algébriques (combien de xy dans x^2), en algèbre, les indices sont plus évidents car ils n'ont pas à être transformés.

Voyons cela de plus près. Proposez de résoudre le problème suivant et demandez de remplir le tableau habituel.

$\sqrt{1x^2 + 8xy + 16y^2}$

Solution

	$1x$	+	$4y$
$1x$	$1x^2$		$4xy$
+			
$4y$	$4xy$		$16y^2$

Mentionnez à votre enfant qu'il peut maintenant écrire : $\sqrt{1x^2 + 8xy + 16y^2}$ = 1x + 4y. C'est-à-dire que la racine carrée de $1x^2 + 8xy + 16y^2$ est $1x + 4y$.

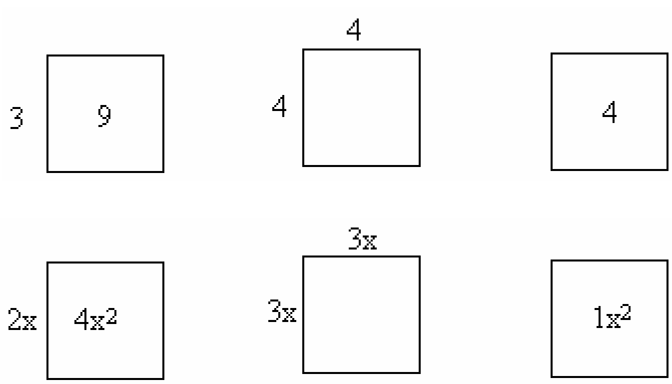
Proposez maintenant $\sqrt{196}$

<u>Note</u> : Ne le dites pas, mais il s'agit du même problème que le précédent. Laissez votre enfant chercher. Au besoin, mentionnez qu'il faut peut-être transformer 196 en une autre représentation équivalente (qui sera ici 1 centaine + 8 dizaines + 16 unités). Parions qu'il comprendra que c'est plus simple en algèbre !

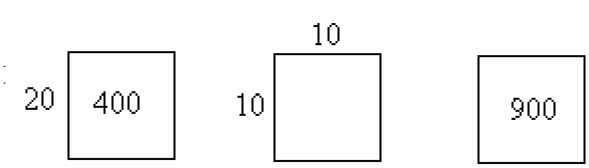
Complétez le tableau habituel et notez $\sqrt{196}$ = 14.

<u>Problème 8</u>

Demandez à votre enfant de compléter les tableaux suivants afin que soient indiquées la largeur, la longueur et l'aire de chaque carré.



Solutions



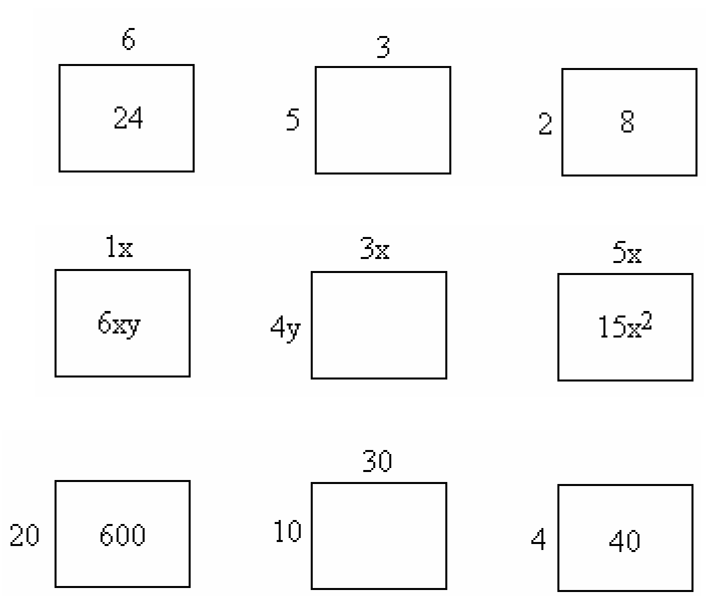
3 16 2 et 2

2x $9x^2$ 1x et 1x

20 100 30 et 30

<u>Problème 9</u>

Comme au problème 8 mais, cette fois, il s’agit de rectangles.



Solutions

4 15 4

6y 12xy 3x

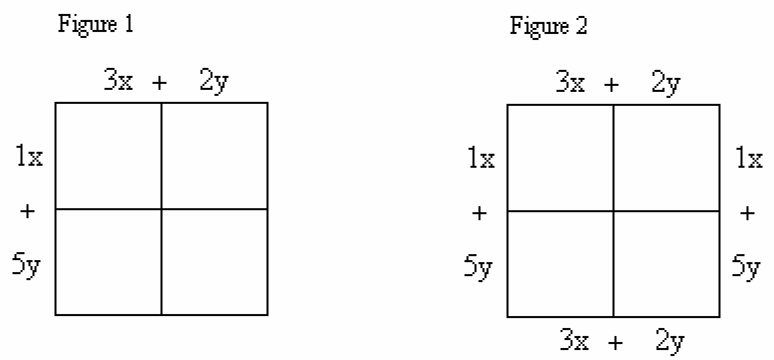
30 300 10

Continuez au besoin jusqu’à ce que votre enfant maîtrise bien les problèmes semblables à ceux posés aux problèmes 8 et 9.

<u>Problème 10</u>

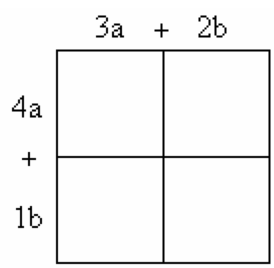
Voici des grilles plus complexes que celles des problèmes 8 et 9, mais elles se complètent de la même façon. Au besoin, notez les dimensions des rectangles sur chacun des côtés. Ainsi, au lieu de la figure 1, vous pouvez utiliser la figure 2.

a)

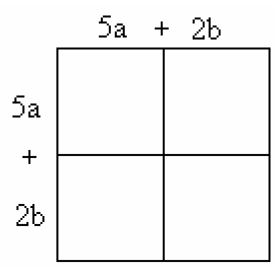


Demandez à votre enfant de compléter les grilles suivantes.

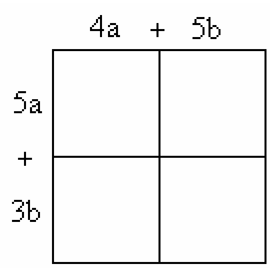
b)



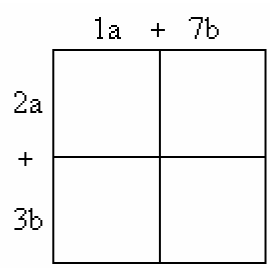
c)



d)



e)



Solutions

a)

	$3x$	$+ 2y$
$1x$	$3x^2$	$+2xy$
$+ 5y$	$+15xy$	$+10y^2$

b)

	$3a$	$+ 2b$
$4a$	$12a^2$	$+8ab$
$+ 1b$	$+3ab$	$+2b^2$

c)

	$5a$	$+ 2b$
$5a$	$25a^2$	$+10ab$
$+ 2b$	$+10ab$	$+4b^2$

d)

	$4a$	$+ 5b$
$5a$	$20a^2$	$+25ab$
$+ 3b$	$+12ab$	$+15b^2$

e)

	$1a$	$+ 7b$
$2a$	$2a^2$	$+14ab$
$+ 3b$	$+3ab$	$+21b^2$

Conservez ces solutions pour le problème suivant.

<u>Problème 11</u>

Mentionnez à votre enfant qu'après avoir rempli des tableaux tels ceux du problème 10, les grands mathématiciens écrivent leurs solutions somme suit :

a) $(3x + 2y) \times (1x + 5y) = 3x^2 + 17xy + 10y^2$

b) $(3a + 2b) \times (4a + 1b) = 12a^2 + 11ab + 2b^2$

c) $(5a+2b) \times (5a +2b) = 25a^2 + 20ab + 4b^2$ Ou $(5a+2b)^2 = 25a^2 + 20ab +4b^2$

Demandez à votre enfant de comparer ces solutions aux grilles (a), (b) et (c) du problème 10.

<u>Note</u> : Pour (c), la seconde égalité montre que la construction à réaliser est un carré. Il suffit donc de noter $(5a + 2b)^2$ pour montrer que la largeur est égale à la longueur.

Demandez à votre enfant de compléter les égalités (d) et (e) en consultant les grilles complétées de 10(d) et 10(e).

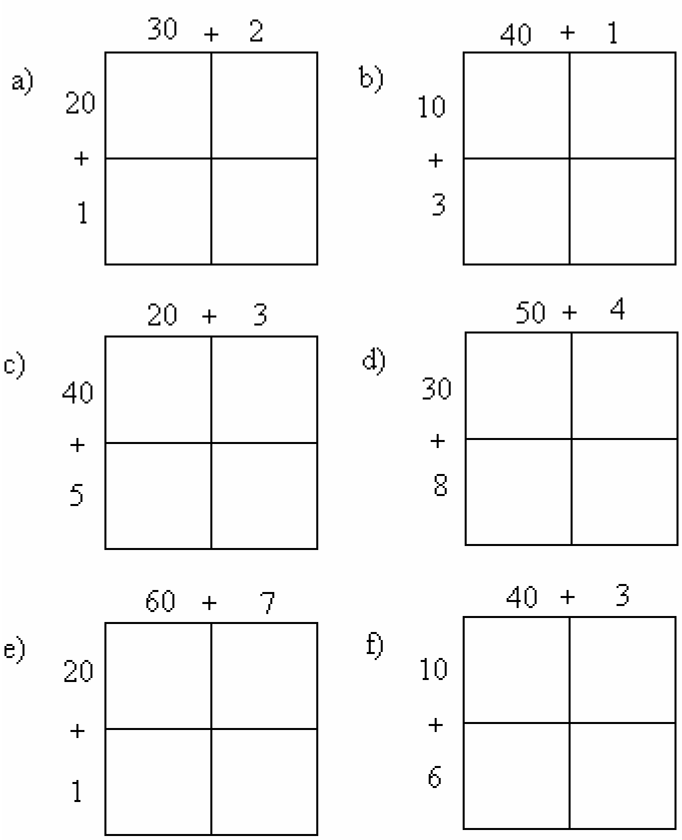
d) $(4a + 5b) \times (5a + 3b) =$
e) $(1a + 7b) \times (\qquad\qquad) =$

Solutions

d) $(4a + 5b) \times (5a + 3b) = 20a^2 + 37ab + 15b^2$
e) $(1a + 7b) \times (2a + 3b) = 2a^2 + 17ab + 21b^2$

Problème 12

Comme au problème 10, il s'agit de compléter les grilles suivantes.



Notes : 1. Donnez à votre enfant le temps de calculer les produits précédents. Comme il ne connaît peut-être pas ses tables par cœur, aidez-le au besoin.
2. Les zéros soulignés servent à indiquer si les chiffres qui les précèdent sont des dizaines (un seul zéro souligné) ou des centaines (deux zéros soulignés).

Solutions

a)

	30	2
20	600	40
1	30	2

b)

	40	1
10	400	10
3	120	3

c)

	20	3
40	800	120
5	100	15

d)

	50	4
30	1500	120
8	400	32

e)

	60	7
20	1200	140
1	60	7

f)

	40	3
10	400	30
6	240	18

<u>Note</u> : Plus tard, nous montrerons que ce qui précède est à l'origine de notre technique de multiplication.

<u>Problème 13</u>

Comme au problème 11, nous allons maintenant noter les multiplications du problème 12 sous la forme d'égalités. Demandez à votre enfant d'expliquer les égalités suivantes en utilisant les solutions du problème 12.

a) (30 + 2) x (20 + 1) = 600 + 70 + 2
32 x 21 = 672

b) (40 + 1) x (10 + 3) = 400 + 130 + 3
41 x 13 = 533

c) (20 + 3) x (40 +5) = 800 + 220 + 15
23 x 45 = 1035

Demandez à votre enfant de compléter :

d) (50 + 4) x (30 + 8) = 1500 +…
54 x 38 = …

e) (60 + 7) x (20 + 1) = …
__________ = __________

f) __________ = __________

__________ = __________

Solutions

d) (50 + 4) x (30 + 8) = 1500 + 520 + 32
54 x 38 = 2052

e) (60 + 7) x (20 + 1) = 1200 + 200 + 7
67 x 21 = 1407

f) (40 + 3) x (10 + 6) = 400 + 270 + 18
43 x 16 = 688

ATTENTION ce que nous développons dans ce chapitre est plus important que la simple capacité à calculer. Il s'agit de développer chez votre enfant deux perceptions inestimables :

1. Toutes les multiplications peuvent être concrétisées par un rectangle ;
2. Toutes les multiplications peuvent être codées dans une grille telle celles vues précédemment.

Problème 14

Cette fois, nous allons multiplier des nombres décimaux. Si votre enfant est las de tels exercices, motivez-le en lui mentionnant que ce n'est qu'à douze ou treize ans que les élèves réussissent ces problèmes d'habitude. Alors, défiez-le de les réussir.

Note : Regardez comment consigner les solutions et lisez la note qui les suit.

a)

	3 unités	+ 2 dixièmes
4 unités		
+ 1 dixième		

b)

	4	+ 0,3
2		
+ 0,1		

c)

	5	+ 0,4
3		
+ 0,1		

d)

	3	+ 0,6
2		
+ 0,4		

e)

	7	+ 0,2
4		
+ 0,5		

f)

	6	+ 0,7
3		
+ 0,2		

Solutions

a)

	3 unités	+ 2 dixièmes
4 unités	12	0,8
+ 1 dixième	0,3	0,02

b)

	4	+ 0,3
2	8	0,6
+ 0,1	0,4	0,03

c)

	5	+	0,4
3	15		$1,\underline{2}$
+			
0,1	$0,\underline{5}$		$0,\underline{04}$

d)

	3	+	0,6
2	6		$1,\underline{2}$
+			
0,4	$1,\underline{2}$		$0,\underline{24}$

e)

	7	+	0,2
4	28		$0,\underline{8}$
+			
0,5	$3,\underline{5}$		$0,\underline{10}$

f)

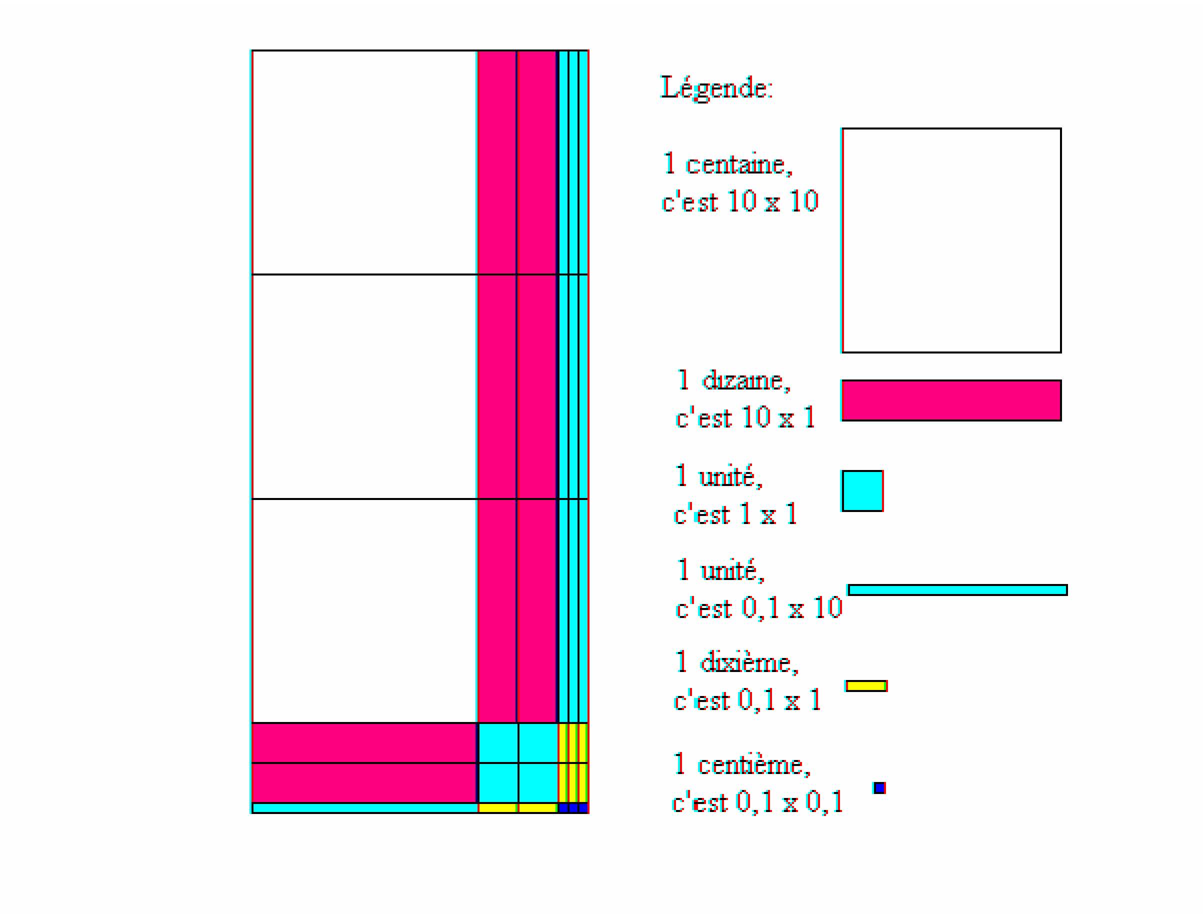
	6	+	0,7
3	18		$2,\underline{1}$
+			
0,2	$1,\underline{2}$		$0,\underline{14}$

<u>Note</u> : Au problème 12, les zéros soulignés indiquaient qu'il s'agissait de dizaines ou de centaines. Cette fois, lorsqu'un chiffre est souligné, il s'agit de dixièmes et lorsque deux chiffres sont soulignés, ce sont des centièmes. Faites remarquer à votre enfant que, dans le problème 12 et dans le problème 14, les cases où aucun chiffre n'est souligné indiquent des unités. Si un seul chiffre est souligné nous avons des dizaines ou des dixièmes. Si deux chiffres sont soulignés, nous avons des centaines ou des centièmes.

Montrez à votre enfant la grille suivante et discutez-en. Vous cherchez à développer une compréhension générale, il est possible que votre enfant ne comprenne pas tout, ce n'est pas grave. Ce n'est qu'un début.

	10	+	2	+	0,3
30	$3\underline{00}$		$6\underline{0}$		9
+					
2	$2\underline{0}$		4		$0,\underline{6}$
+					
0,1	1		$0,\underline{2}$		$0,\underline{03}$

Voici une illustration graphique de la grille précédente. Les dimensions des carrés sont réduites, mais illustrent la multiplication 12,3 x 32,1.

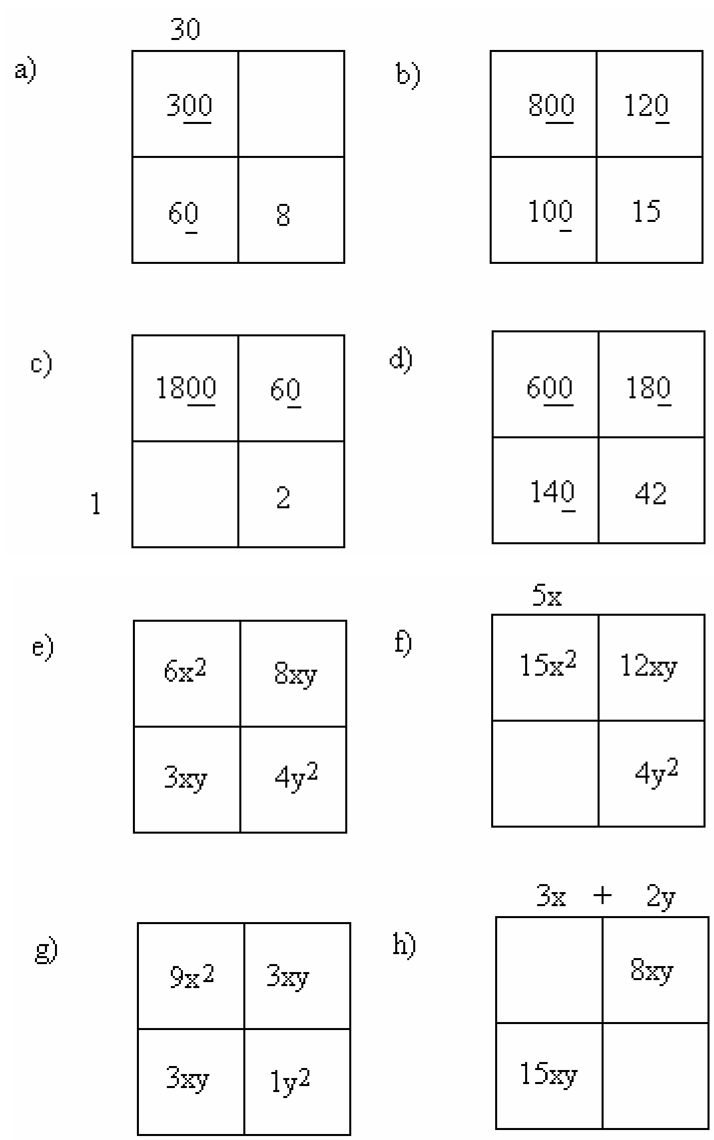


Si vous en avez la patience, vous pouvez reproduire le dessin précédent grandeur nature. Utilisez les centicubes pour illustrer les centièmes, les bandes 10cm x 10cm pour les dixièmes, les carrés 10 cm x 10 cm et des bandes de 100cm 1cm pour les unités, des bandes de 100 cm x 10 cm pour les dizaines et des carrés de 100 cm x 100 cm pour les centaines. En fait, avec ce matériel, le décimètre carré devient l'unité de mesure. De cette façon, le mètre carré représente la centaine ($1m^2 = 100\ dm^2$), le centimètre carré représente le centième ($1dm^2 = 100\ cm^2$).

Assurez-vous que votre enfant comprend que les deux représentations des unités sont équivalentes.

Problème 15

Voici des grilles où des nombres manquent. Demandez à votre enfant de découvrir les nombres manquant qui vont dans la grille ou sur ses bordures.



Solutions

a)	30	+ 4
10	300	40
+ 2	60	8

b)	20	+ 3
40	800	120
+ 5	100	15

c)	60	+ 2
30	1800	60
+ 1	60	2

d)	20	+ 6
30	600	180
+ 7	140	42

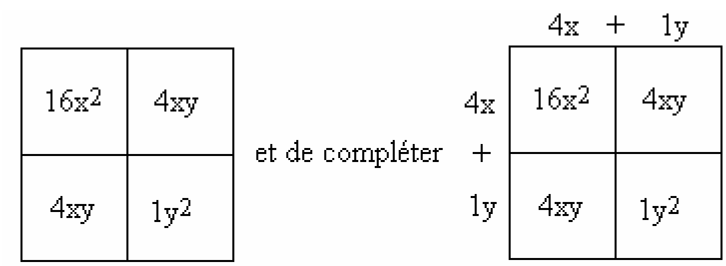
e)	3x	+ 4y
2x	$6x^2$	8xy
+ 1y	3xy	$4y^2$

f)	5x	+ 4y
3x	$15x^2$	12xy
+ 1y	5xy	$4y^2$

g)	3x	+ 1y
3x	$9x^2$	3xy
+ 1y	3xy	$1y^2$

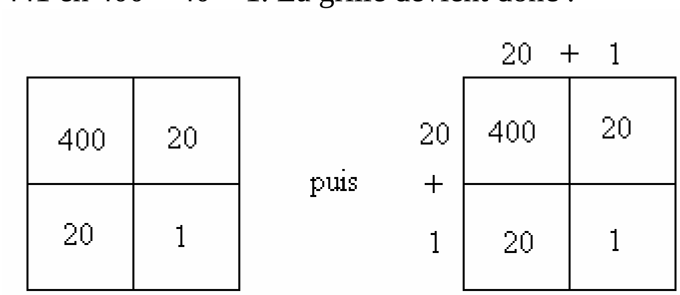
h)	3x	+ 2y
4x	$12x^2$	8xy
+ 5y	15xy	$10y^2$

<u>Note</u> : Pour votre information seulement pour l'instant. La racine carrée d'un trinôme algébrique tel $16x^2 + 8xy + 1y^2$ est facile à trouver avec les grilles qui précèdent. Il suffit de situer le trinôme dans la grille comme suit :



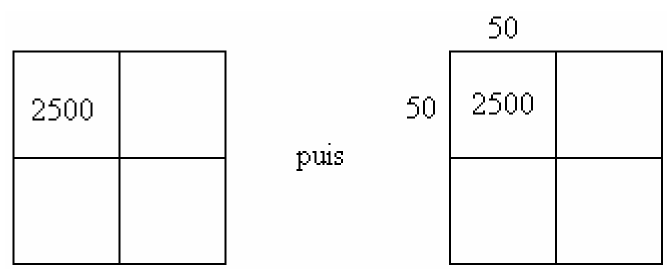
Donc, le terme 8xy est partagé également en 4xy + 4xy situés sur la diagonale. Ainsi, la racine carrée de $16x^2 + 8xy + 1y^2$ est 4x + 1y.

De la même façon, si nous avons un carré tel 441, il suffit d'isoler le carré 400 pour décomposer 441 en 400 + 40 + 1. La grille devient donc :

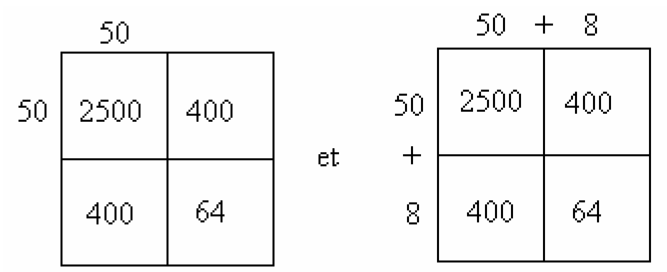


Donc $\sqrt{441} = 21$.

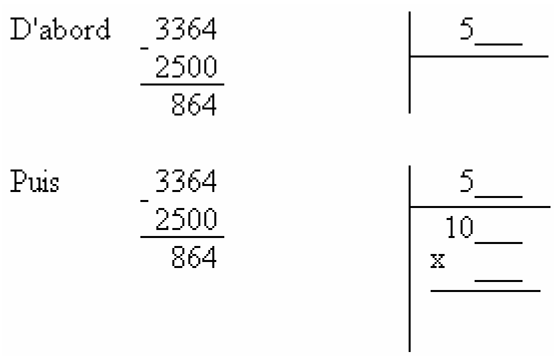
Un autre essai ? Essayez avec 3364. Le plus grand carré qui se termine par 00 est 2500. Nous obtenons donc :



Puisque 3364 – 2500 = 864, il faut trouver les deux nombres égaux qui doivent être situés sur la diagonale de la grille. Chacun de ces nombres est un multiple de 50. La somme de ces deux nombres est donc le plus grand multiple de 100 inclus dans 864, c'est 800. D'où les multiples de 50 sont 400 que nous situons dans la grille ainsi que 64 puisque 3364 = 2500 + 400 + 400 + 64.
Donc :



La racine carrée de 3364 est donc 58. La technique traditionnelle découle de la grille précédente. La voici :



Le chiffre manquant est le même aux 3 endroits. Il est tel que 10___x ___ est égal ou plus petit que 864. Il s’agit donc de 8 et nous obtenons :